

Pohdin – projekti<sup>1</sup>

# GeoGebra

– ohjeita ja tehtäviä<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Lukuvuosina 2008-2012 Tampereen normaalikoulun matematiikan opetusharjoittelijat ovat olleet rakentamassa joko Capri-oppaita ja niiden pohjalta nyt käsillä olevaa GeoGebra-opasta. Tavoitteena matematiikan oppiainekohtaisessa toiminnassa on ollut tehdä peruskoulun ja lukiokäyttöön hyvän ilmaisohjelman käyttöä tukeva suomenkielinen materiaali.

<sup>2</sup> Moniste sisältää viittauksia WSOY:n Pitkä matematiikka kirjasarjaan.

## Sisällysluettelo

Esijärjestin .....	3
Ohjeet .....	6
Tehtävät: Yläkoulu .....	22
7. lk.....	22
8.lk.....	30
9.lk.....	34
Tehtävät: Lukio.....	36
Suora ja piste .....	36
Ympyrä .....	39
Paraabeli.....	44
Monikulmiot .....	46
Vektorit.....	50
Differentiaalilaskenta .....	52
Integraalilaskenta.....	52

## Esijärjestin

YLÄKOULU	aihepiiri	tehtävä
	yhteen- ja vähennyslasku	<a href="#">Kokonaislukujen summa</a>
	geometrista konstruointia	<a href="#">Akselit</a>
		<a href="#">Koordinaatisto</a>
		<a href="#">Koordinaatisto, pisteet, suorat ja janat</a>
	suora	<a href="#">Suora koordinaatistossa</a>
		<a href="#">Suoran yhtälön <math>y=kx+b</math> kertoimet</a>
		<a href="#">Keskinormaali</a>
		<a href="#">Suorien rajaama kolmio</a>
	toisen asteen yhtälö	<a href="#">Toisen asteen yhtälö</a>
	yhdenmuotoisuus ja yhtenevyys	<a href="#">Pienennökset ja suurennokset</a>
	– kierto tasossa	<a href="#">Kierto pisteen suhteen</a>
	– peilaukset	<a href="#">Peilauksia</a>
		<a href="#">Peilaus suoran suhteen</a>
		<a href="#">Peilaus pisteen suhteen</a>
	– siirto tasossa	<a href="#">Siirto tasossa</a>
	kulmien välisiä yhteyksiä	<a href="#">Kulman suuruus</a>
		<a href="#">Kulmanpuolittaja</a>
		<a href="#">Kolmion kulmien summa ja oikokulman suuruus</a>
		<a href="#">Risti- ja vieruskulmat</a>
	monikulmiot	<a href="#">Monikulmio</a>
		<a href="#">Säännöllisen kuusikulmion piirtäminen</a>
	kolmio	<a href="#">Kolmio ja kulmat</a>
		<a href="#">Kolmion kulmien summa</a>
		<a href="#">Tasakylkinen ja tasasivuinen kolmio</a>
		<a href="#">Kolmion pinta-ala</a>
	– Pythagoraan lause	<a href="#">Suorakulmaisen kolmion sivujen neliöt</a>
	– kolmio ja ympyrä	<a href="#">Kolmion ja ympyrän välisiä yhteyksiä</a>
	– trigonometria	<a href="#">Trigonometrisiä funktioita</a>
	nelikulmio	<a href="#">Suunnikas</a>
	ympyrä	<a href="#">Ympyrä</a>
		<a href="#">Ympyrän kehän ja halkaisijan suhde</a>
		<a href="#">Ympyrän pinta-ala, piiri ja kaaren pituus</a>
		<a href="#">Kehäkulman koko ja sektorin kaaren pituus</a>
		<a href="#">Neliöt ympyrän sisä- ja ulkopuolella</a>

LUKIO		
MAA3	Geometria	
	ympyrä	<a href="#">Ympyrä</a>
		<a href="#">Ympyrän keskipiste</a>
		<a href="#">Ympyrän säde</a>
		<a href="#">Ympyrän kaarevuussäde</a>
		<a href="#">Kehäkulma ja keskuskulma</a>
		<a href="#">Ympyrän tangentti</a>
		<a href="#">Ympyrän tangenttien tangenttikulma</a>
		<a href="#">Keskuskulman ja tangenttikulman välinen yhteys</a>
		<a href="#">Ympyrän säteen ja tangentin kohtisuoruus</a>
		<a href="#">Ympyrän yhtälö</a>
		<a href="#">Piste ympyrällä</a>
		<a href="#">Ympyrä kahdeksankulmion sisällä</a>
		<a href="#">Ympyrän yhtälö kolmen kehän pisteen avulla</a>
		<a href="#">Toisiaan leikkaavat ympyrät</a>
		<a href="#">Piste ympyrän sisällä</a>
	ympyrä ja kolmio	<a href="#">Ympyrän ja kolmion pinta-alat</a>
		<a href="#">Ympyrän keskuskolmio</a>
		<a href="#">Kolmio ympyröiden keskipisteistä</a>
	monikulmiot	<a href="#">Säännöllinen kymmenkulmio</a>
		<a href="#">Monikulmion kulmien summa</a>
		<a href="#">Suunnikas</a>
		<a href="#">Nelikulmion pinta-alan määrittäminen</a>
		<a href="#">Viisikulmion pinta-ala</a>
		<a href="#">Pyramidin pinta-ala</a>
	kolmio	<a href="#">Kolmion kulmien summa</a>
		<a href="#">Trigonometriset funktiot</a>
		<a href="#">Kulman määrittäminen trigonometrisesti</a>
MAA4	Analyttinen geometria	
	suora	<a href="#">Suora ja piste</a>
		<a href="#">Pisteiden ja suorien piirtämistä</a>
	– etäisyys	<a href="#">Etäisyys pisteestä</a>
		<a href="#">Pisteen etäisyys suorasta</a>
		<a href="#">Origon etäisyys suorasta</a>
	– suoran yhtälö	<a href="#">Suoran kulmakerroin</a>
		<a href="#">Suoran yhtälön määrittäminen</a>
		<a href="#">Suoran normaalin yhtälö</a>
		<a href="#">Suorien leikkauspiste</a>
	– suorien kohtisuoruus	<a href="#">Suorien kohtisuoruus</a>
	ympyrä	<a href="#">ks. MAA3: ympyrä</a>
	paraabeli	<a href="#">Paraabeli; paraabelin yhtälö</a>
		<a href="#">Paraabelin yhtälön määrittäminen</a>

		<a href="#">Paraabelin avautumissuunta ja leikkauspiste</a>
		<a href="#">Paraabelien leikkauspisteet</a>
		<a href="#">Suoran ja paraabelin leikkauspiste</a>
		<a href="#">Paraabelin ja x-akselin leikkauskohdat</a>
	yhtälöpari	<a href="#">Yhtälöparin ratkaiseminen</a>
<b>MAA5</b>	<b>Vektorit</b>	
	perusominaisuuksia	<a href="#">Vektoreiden muodostaminen</a>
		<a href="#">Vektorit suorakulmaisessa kolmiossa</a>
	yhteen- ja vähennyslasku	<a href="#">Vektoreiden yhteenlasku</a>
		<a href="#">Summavektori</a>
		<a href="#">Summavektori ja nelikulmio</a>
	vektorin kertominen luvulla	<a href="#">Vektorin kertominen kokonaisluvulla</a>
<b>MAA7</b>	<b>Derivaatta</b>	
		<a href="#">Tangenttien välinen kulma</a>
		<a href="#">Derivaatan nollakohdat</a>
<b>MAA9</b>	<b>Trigonometriset funktiot</b>	
		<a href="#">Trigonometrisen funktion derivaatta</a>
		<a href="#">Yksikköympyrä, sini ja kosini</a>
<b>MAA10</b>	<b>Integraalilaskenta</b>	
		<a href="#">Funktion määrätty integraali</a>
		<a href="#">Kahden kuvaajan välinen pinta-ala</a>

# Ohjeet

## **Yleistä:**

GeoGebra on interaktiivinen työväline geometrian tehtäviin. Sen avulla voidaan tehdä tasogeometrisia konstruktioita. Konstruktion kohteena olevaa objekta voidaan siirtää hiirellä, jolloin kuva muuntuu vastaavasti.

GeoGebra soveltuu hyvin matematiikan apu- ja havainnollistamisvälineiksi peruskouluun ja lukioon. Erityisen hyvin GeoGebra tukee oppilaan itsenäistä työskentelyä ja tutkivaa oppimista. Ohjelma on kätevä ladata verkosta joko omalle tai koulun koneelle.

## **Asennus:**

GeoGebran vaatimukset: Webstartille: Java 1.4.2, Windows NT/2000/XP/2003/Vista, Mac OS X 10.3 tai uudempi tai Linux.

Java-ohjelman voit ladata tarvittaessa osoitteesta <http://java.com/en/download/index.jsp>

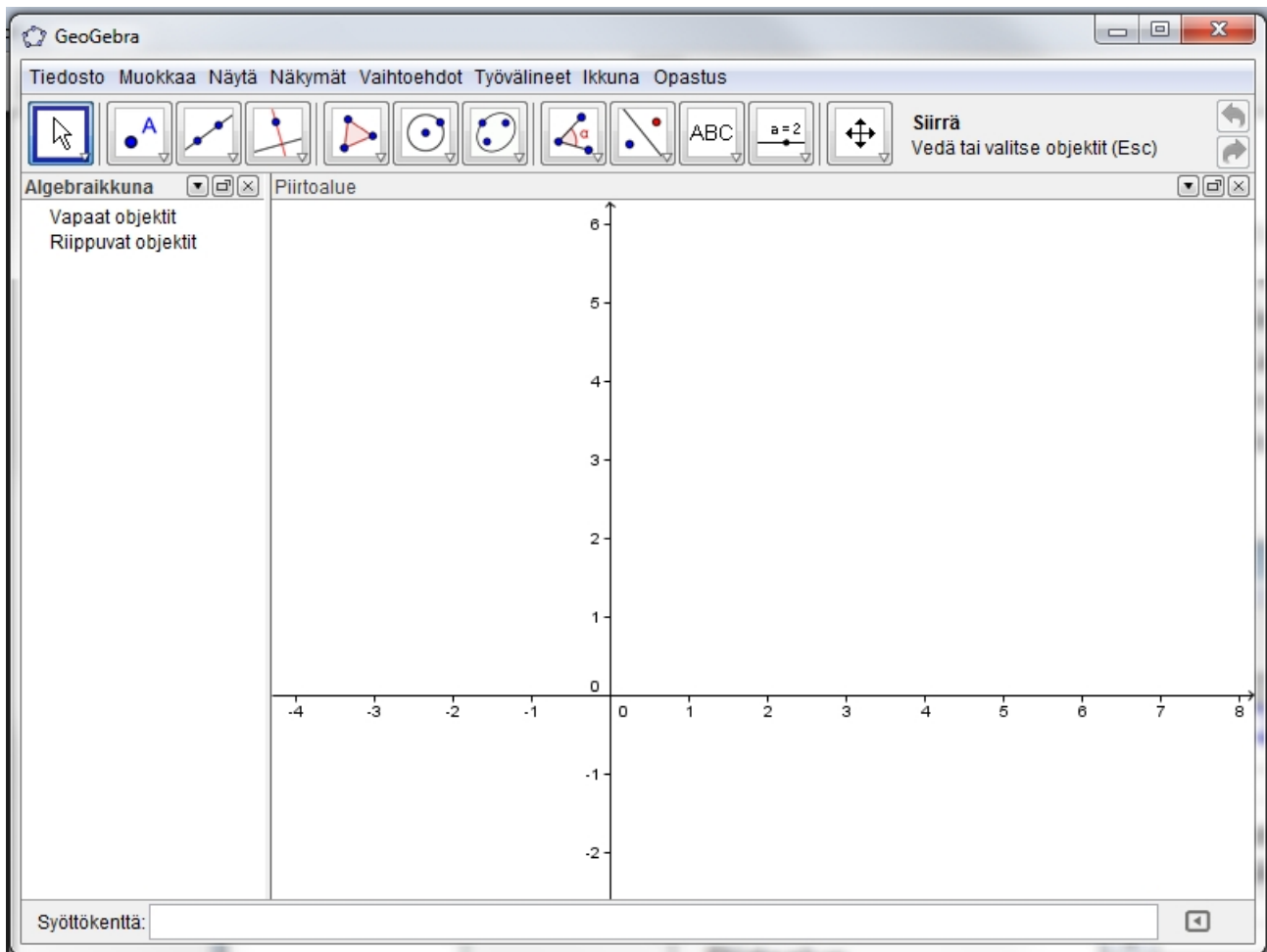
GeoGebran voit ladata omalle koneellesi osoitteesta <http://www.geogebra.org/cms/>

- Avattuasi sivun paina isoa vihreän väristä nappia, jossa lukee "Download"
- Painettuasi nappia avautuu uusi sivu, jossa on näkyvillä muun tekstin lisäksi kolme sinistä nappia
- Paina sinistä nappia, jossa lukee "Webstart"
- Valitse eteesi ilmestyvän ponnahdusikkunan vaihtoehdoista "Tallenna tiedosto"
- Tällöin ohjelma tallentaa GeoGebran tietokoneen työpöydälle
- Painamalla työpöydälle ilmestynyttä GeoGebran kuvaketta avautuu GeoGebran aloitusikkuna
- GeoGebra on nyt valmis käytettäväksi

GeoGebran pidempi käyttöohje (versio 3.2) löytyy osoitteesta [http://www.geogebra.fi/artikkelit/2010-11-12\\_docufi32.pdf](http://www.geogebra.fi/artikkelit/2010-11-12_docufi32.pdf)

## Aloituskäyttö:

GeoGebra aloitusikkuna näyttää seuraavalta:



Ikkunasta löytyy graafinen piirtoalue, numeerinen algebraikkuna, käytettävien työvälineiden työkalupalkki ja ylävalikko. Matemaattiset objektit voidaan näin ollen esittää joko algebrallisessa tai graafisessa muodossa. Myös laskentataulukko on mahdollista saada esille Näytä-valikosta.

Ylävalikko:

- **Tiedosto:** sisältää tiedostojen avaus-, tallennus-, tulostus- ja suljetoiminnot
- **Muokkaa:** peruuta, tee uudestaan, leikkaus, liittäminen ja kopiointi toiminnot
- **Näytä:** akselien, koordinaattiruudusto, algebraikkuna, laskentataulukko, piirtoalue yms.
- **Näkymät:** Voit valita ikkunaan erilaisia näkymiä, oletus näkymä on algebra ja grafiikka
- **Vaihtoehdot:** Erilaisia muokkaustoimintoja esim kieliasetukset ja fontinkoko
- **Työvälineet:** Valittavina samat työvälineet, jotka näkyvät työkalupalkissa

- **Ikkuna:** Avaa uusi ikkuna
- **Opastus:** Ohjeita GeoGebran käyttöön ja linkki GeoGebran sivuille

### Piirtoalue:

Piirtoalueelle voi työvälinepalkissa olevien piirtotyövälineiden avulla tuottaa geometrisiä piirroksia.

Työkalut:



- Painamalla työkalun oikeassa nurkassa olevaa kolmiota saat avattua pudotusvalikon näkyviin, josta löytyy lisää piirtotyökaluja.
- Työvälineiden oikealla puolella on työvälineopas, joka kertoo lyhyen ohjeen työvälineen käyttö varten.

### Siirrä-työkalu



#### Siirrä

Valitse objekti ja siirrä objektia vetämällä sitä hiiren vasemmalla näppäimellä. Käyttämällä siirrä toimintoa voit myös poistaa objektin painamalla *Delete*-näppäintä.



#### Kierto pisteen ympäri

Valitse jokin kiertopiste ja sen jälkeen piste, jonka haluat kiertää kiertopisteen suhteen. Huom! ohjelma ei osaa valita esim. kokonaista monikulmiota kierrettäväksi kiertopisteen suhteen.



#### Vie taulukkoon

Avaa laskentataulukon automaattisesti. Tällä työvälineellä voit liikuttaa objektia ja tallentaa jaksojen arvot laskentataulukon. Tämä työväline toimii luvuilla, pisteillä ja vektoreilla. Huom: GeoGebra käyttää laskentataulukon kahta ensimmäistä vapaata saraketta arvojen tallentamiseen.



## Piste-työkalu



### Piste

Merkitse piste piirtoalueen haluamaasi kohtaan hiiren vasemmassa näppäimellä. Pisteiden arvon saat merkittyä tarkemmin kirjoittamalla syötekenttään: Esim.  $A=(-1,2)$



### Piste objektilla

Lisää hiiren vasemmassa näppäimellä piste kiinni johonkin toiseen objektiin.



### Kiinnitä/Vapauta piste

Valitse haluamasi piste ja sen jälkeen objekti johon haluat kiinnittää pisteen hiiren vasenta näppäintä käyttäen. Ohjelma siirtää pisteen nyt automaattisesti valitulle objektille. Piste voi vapauttaa objektilta painamalla pistettä uudelleen hiiren vasemmassa näppäimellä



### Kahden objektin leikkauspiste

Toiminto asettaa pisteen/pisteet tarkasti haluamasi objektien leikkauspisteeseen/-pisteisiin, kun valitset ensin toisen objektista ja sitten toisen hiiren vasenta näppäintä käyttäen. Voit myös valita suoraan kahden objektin leikkauspisteen, jolloin luodaan vain tämä leikkauspiste.



### Keskipiste

Valitse kaksi pistettä/jana/ympyrä/ellipsi, jolloin ohjelma piirtää valittujen pisteiden välille/kuviolle keskipisteen.



### Kompleksiluku

Merkitse kompleksiluku piirtoalueen haluamaasi kohtaan hiiren vasemmassa näppäimellä. Pisteiden arvon saat merkittyä tarkemmin kirjoittamalla syötekenttään: Esim.  $z =(-1 + 2i)$ .

## Suora-työkalu



### Suora kahden pisteen kautta

Valitse kaksi pistettä, jolloin ohjelma piirtää suoran valittujen pisteiden kautta



### Kahden pisteen välinen jana

Valitse kaksi pistettä, esimerkiksi A ja B, luodaksesi janan niiden välille. Janan pituus näkyy algebraikkunassa.



### Jana: päätepiste ja pituus

Valitse piste, jonka haluat olevan janan päätepiste. Anna haluamasi janan pituus ikkunan tekstikenttään, jonka jälkeen ohjelma piirtää janan. Toiminto luo itse janan

toisen päätepisteeseen. Siirrä-työkalua  käyttämällä voit kiertää janaa alussa määräämäsi päätepisteeseen ympäri, tällöin janan pituus säilyy.



### Puolisuora kahden pisteen kautta

Valitse kaksi pistettä, jolloin ohjelma piirtää puolisuoran kulkemaan valittujen pisteiden kautta siten, että ensin valittu piste on puolisuoran päätepiste. Puolisuoran yhtälö tulee näkyviin algebraikkunaan.



### Murtoviiva

Valitse pisteet, jotka haluat yhdistää murtoviivalla. Valitse pisteet siinä järjestyksessä, jossa haluat murtoviivan kulkevan. Valitse lopuksi vielä ensimmäinen piste uudestaan.



### Vektori pisteestä pisteeseen

Valitse vektorin alku- ja loppupiste.



### Vektori: alkupiste ja vektori

Valitse vektorille alkupiste ja sitten vektori, jonka haluat lähtevän valitsemastasi alkupisteestä. Ohjelma luo tällöin vektorin, joka on valitsemasi vektorin suuntainen ja pituinen ja lähtee valitusta alkupisteestä.

## Normaali-työkalu



### Normaali

Valitsemalla suoran ja pisteen saat pisteen kautta valittua suoraa vastaan kohtisuorassa olevan suoran.



### Yhdensuuntainen

Valitsemalla suoran ja pisteen saat valitun suoran kanssa yhteisen suoran, joka kulkee valitun pisteen kautta.



### Keskinormaali

Valitse jana tai kaksi pistettä, jolloin ohjelma määrittää janan keskinormaalin



### Kulman puolittaja

Kulman puolittajan voit luoda kahdella eri tavalla:

- Valitsemalla kolme pistettä saat kulman puolittajan pisteiden muodostamaan kulmaan. Toisena valittu piste on tällöin kulman kärkipiste.
- Valitsemalla kaksi suoraa ohjelma luo kaksi kulman puolittajaa.



### Tangentti

Voit luoda kartioleikkaukselle tangentin kahdella eri tavalla:

- Valitsemalla pisteen ja kartioleikkauksen saat pisteen kautta kulkevat kartioleikkauksen tangentit.
- Valitsemalla suoran ja kartioleikkauksen saat suoran kanssa yhdensuuntaiset kartioleikkauksen tangentit.



### Napasuora

Luo kartioleikkaukselle napa- tai lävistäjäsuora.

- Valitsemalla pisteen ja kartioleikkauksen saat napasuoran
- Valitsemalla suoran tai vektorin ja kartioleikkauksen saat lävistäjäsuoran



### Sovita suora

Voit sovittaa suoran pistejoukkoon kahdella eri tavalla:

- Valitse suorakulmion muotoinen alue, jonka sisällä pisteet ovat.
- Tee lista pisteistä, joille haluat sovittaa suoran



### Ura

Valitse piste, joka riippuu toisesta pisteestä ja jonka ura on piirrettävä. Sitten näpäytä pistettä, josta valitsemasi piste on riippuvainen. Huom: Valitun pisteen on oltava jollain objektilla, kuten suoralla, janalla, ympyrällä tai vastaavalla.

Esim:

- Kirjoita  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  syöttökenttään
- Sijoita uusipiste x-akselille
- Luo piste  $B = (x(A), f'(x(A)))$ , joka riippuu pisteestä  $A$ .
- Valitse Ura-työkalu ja näpäytä ensin pistettä  $B$  ja sitten pistettä  $A$ .
- Vedä pistettä  $A$  x-akselia pitkin havaitaksesi, että piste  $B$  liikkuu pitkin urasuoraansa

## **Monikulmio-työkalu**




### Monikulmio

Valitse vähintään kolme pistettä, joiden haluat olevan monikulmion kärkipisteitä. Tämän jälkeen valitse uudelleen ensimmäinen piste sulkeaksesi monikulmion. Monikulmion pinta-ala näkyy automaattisesti algebraikkunassa.



### Säännöllinen monikulmio

Valitse kaksi pistettä ja anna monikulmion kulmien lukumäärä auenneeseen tekstikenttään. Ohjelma piirtää tällöin haluamasi monikulmion. Monikulmiota voit

liikuttaa määritettyjen kahden pisteen avulla siirrä-työkalua  käyttämällä.



### Jäykkä monikulmio

Valitse vähintään kolme pistettä, joiden haluat olevan monikulmion kärkipisteitä. Tämän jälkeen valitse uudelleen ensimmäinen piste sulkeaksesi monikulmion. Monikulmion pinta-ala näkyy automaattisesti algebraikkunassa. Jäykän monikulmion pisteiden paikkaa ei voi enää muuttaa jälkikäteen siirrä-työkalun avulla, vaan koko kuvio siirtyy aina kerralla.



### Vektori monikulmio

Valitse vähintään kolme pistettä, joiden haluat olevan monikulmion kärkipisteitä. Tämän jälkeen valitse uudelleen ensimmäinen piste sulkeaksesi monikulmion. Monikulmion pinta-ala näkyy automaattisesti algebraikkunassa. Ensimmäinen piste on vektorien aloituspiste, joten siitä ei voi säätää vektorien pituutta tai suuntaa. Muiden pisteiden avulla voi vektorien pituuksia ja suuntia muuttaa.

## Ympyrä-työkalu



### Ympyrä: keskipiste ja kehän piste

Valitse kaksi pistettä, joista ensimmäinen on ympyrän keskipisteenä ja toinen kehän pisteinä. Ympyrän säde on tällöin valittujen pisteiden välinen etäisyys.



### Ympyrä: keskipiste ja säde

Valitse keskipiste ja anna säteen pituus auenneeseen ikkunan tekstikenttään.



### Harppi

Valitse jana tai kaksi pistettä määritelläkseni ympyrän säteen. Tämän jälkeen valitse piste, jonka haluat olevan ympyrän keskipiste.



### Ympyrä: kolme kehän pistettä

Valitse kolme pistettä, jolloin ohjelma piirtää ympyrän, joka kulkee valittujen pisteiden kautta. Huom: Jos pisteet ovat samalla suoralla, ympyrä supistuu suoraksi.



### Puoliympyrä

Valitse kaksi pistettä, jotka toimivat puoliympyrän kaaren päätepisteinä.



### Ympyränkaari: keskipiste ja kaksi pistettä

Aloita valitsemalla kaaren keskipiste. Tämän jälkeen valitse ensin kaaren aloituspiste ja tämän jälkeen piste, joka määrittelee kaaren pituuden. Huom: Ympyräkaaren aloituspiste on aina kaarella, mutta pituuden määräävä piste ei välttämättä ole.



### Ympyrän kaari kolmen pisteen kautta

Valitse kolme pistettä, jolloin ohjelma piirtää ympyräkaaren kulkemaan näiden pisteiden kautta. Ensimmäinen ja viimeinen piste toimivat kaaren päätepisteinä.



### Ympyräsektori: keskipiste ja kaksi pistettä

Aloita valitsemalla ympyräsektorin keskipiste. Tämän jälkeen valitse ensin ympyräsektorin kaaren aloituspiste ja tämän jälkeen piste, joka määrittelee ympyräsektorin kaaren pituuden. Huom: kaaren aloituspiste on aina ympyräsektorin kaarella, mutta pituuden määrittävä piste ei välttämättä ole.



### Ympyräsektori: kolme pistettä

Valitse kolme pistettä, joiden kautta haluat ympyräsektorin kaaren kulkevan. Ensimmäisenä ja viimeisenä valitut pisteet toimivat ympyräsektorin kaaren päätepisteinä,

## **Ellipsi-työkalu**



### Ellipsi

Valitse kaksi polttopistettä ja yksi piste ellipsin kehältä.



### Hyperbeli

Valitse kaksi polttopistettä ja yksi piste hyperbeliltä.



### Paraabeli

Valitse polttopiste ja johtosuoran. Paraabelin voit myös piirtää kirjoittamalla syötekenttään paraabelin yhtälön *Esim:*  $y = x^2 - 2x + 3$ .



### Kartioleikkaus viiden pisteen kautta

Valitse viisi pistettä, jolloin ohjelma piirtää kartioleikkauksen, joka kulkee valittujen pisteiden kautta.

## Kulma-työkalu



### Kulma

Voit luoda kulman usealla eri tavalla:

- Valitsemalla kolme pistettä (piste oikealta kyljeltä, kärkipiste ja piste vasemmalta kyljeltä) voit luoda kulman.
- Valitsemalla kaksi janaa, voit luoda kulman niiden välille. Valitse janat vastapäivään.
- Valitsemalla kaksi suoraa saat luotua kulman suorien välille.
- Valitsemalla kaksi vektoria saat luoda kullan niiden välille.
- Valitsemalla kaksi monikulmion sivua myötäpäivään, saat monikulmion kulman näkyviin.

Huom: Kulmat luodaan vastapäivään monikulmion kulmia lukuun ottamatta, sen vuoksi on tärkeää missä järjestyksessä valitut objektit.



### Kulma: koko annetaan

Valitse kaksi pistettä, joista jälkimmäinen piste toimii kulman kärkipisteenä. Anna tämän jälkeen kulman suuruus auenneeseen tekstikenttään.



### Etäisyys tai pituus

Voit määrittää kahden pisteen, kahden suoran tai pisteen ja suoran välisen etäisyyden. Etäisyys näkyy dynaamisena tekstinä piirtoalueella. Voit myös määrittellä janan tai ympyrän kehän pituuden sekä monikulmion piirin.



### Pinta-ala

Voit määrittää monikulmion, ympyrän tai ellipsin pinta-alan lukuna, joka näkyy dynaamisena tekstinä piirtoalueella.



### Kulmakerroin

Voit määrittellä suoran kulmakertoimen, valitsemalla haluamasi suoran.



### Luo lista

Valitse piirtoalueelta objektit, joista haluat luoda listan.

## **Peilaus-työkalu**



### Peilaus suoran suhteen

Valitse peilattava objekti ja sen jälkeen valitse suora, jonka suhteen haluat objektin peilata.



### Peilaus pisteen suhteen

Valitse peilattava objekti ja sen jälkeen valitse piste, jonka suhteen haluat objektin peilata.



### Peilaus ympyrän suhteen

Työvälineen avulla voit liikuttaa pistettä ympyrän suhteen. Valitse liikutettava piste ja sen jälkeen valitse ympyrä, jonka suhteen haluat pistettä peilata.



### Kierto pisteen suhteen annetun kulman verran

Valitse kierrettävä objekti ja sen jälkeen valitse piste, jonka ympäri haluat objektia kiertää. Määritä haluamasi kiertokulma auenneen ikkunan tekstikenttään.



### Siirrä objektia vektorin verran

Valitse siirrettävä objekti ja sen jälkeen vektori, jonka verran haluat objektia siirtää.



### Venytä pisteen suhteen annetulla kertoimella

Valitse aluksi venytettävä objekti ja sen jälkeen piste, jonka suhteen venytetään. Määritä auenneeseen ikkunaan venytyskerroin.



## Teksti-työkalu



Lisää teksti

Voit luoda staattisia tai dynaamisia tekstejä piirtoalueelle.

Voit määrittää tekstin paikan seuraavilla tavoilla:

- Valitse piirtoalueelta kohta, johon haluat tekstin liittää
- Valitse piste, johon haluat tekstin liittää

Tämän jälkeen aukeaa ikkuna, johon voit kirjoittaa haluamasi tekstin.

**Staattinen teksti** ei ole riippuvainen matemaattisista objekteista, joten objektien arvojen muuttaminen ei vaikuta staattiseen tekstiin

**Dynaaminen teksti** sisältää objektien arvoja, jotka päivittyvät tekstiin automaattisesti niiden muuttuessa.

Voit halutessasi luoda tekstiin sekä staattista, että dynaamista tekstiä. Kirjoita ensin staattinen osa (Esim: *Piste A =*) ja valitse tämän jälkeen objekti, jonka arvon haluat näkyvän tekstissä. GeoGebra päivittää automaattisesti dynaamisen tekstin muutosäännöt ja lainausmerkit staattisen tekstin ympärille ja plus merkin liittämään eri osat tekstiin (Esim: *"Piste A =" + A*).

Huom: Jos käytät staattisessa tekstissä olemassa olevan objektin nimeä, tulee nimen ympärillä käyttää lainausmerkkejä. Muuten GeoGebra luo automaattisesti dynaamisen tekstin ja näyttää objektin arvon nimen sijasta.

Huom: Esiintyessään dynaamisen tekstin kanssa staattisen tekstin tulee olla lainausmerkkien sisällä. Dynaaminen ja staattinen teksti tulee yhdistää toisiinsa plus-merkillä.



Lisää kuva

Tällä työvälineellä voit lisätä kuvan piirtoalueelle. Ensiksi tulee määrittää kuvan paikka jollain seuraavista tavoista:

- Valitse piirtoalueelta kohta, johon haluat kuvan vasemman alanurkan tulevan.
- Valitse piste, joka toimii kuvan vasempana alanurkkana.

Tämän jälkeen aukeaa ikkuna, josta voit valita tietokoneellesi tallennetun kuvan.

Kuvan ominaisuudet:

Voit kiinnittää kuvan näytön kohtaan tai koordinaatistoon valikosta *Muokkaa* → *Ominaisuudet* → *Perusominaisuudet välilehdestä*. Voit myös asettaa kuvan taustakuvaksi, jonka jälkeen sitä ei voi enää valita hiirellä.

Voit määrätä kuvan kolme nurkkaa valikosta *Muokkaa* → *Ominaisuudet* → *Perusominaisuudet välilehdestä*. Näin voit muuttaa kuvan kokoa, kiertää tai jopa vääntää sitä.

- **Nurkka 1:** Kuvan vasemman alanurkan paikka
- **Nurkka 2:** Kuvan oikean alanurkan paikka (Huom: *Nurkka 2*:sen voi asettaa vasta kun *Nurkka 1* on asetettu. *Nurkka 2* määrittää kuva leveyden).
- **Nurkka 4:** Kuvan vasemman ylänurkan paikka. ( Huom: *Nurkka 4*:sen voi asettaa vasta kun *Nurkka 1* on asetettu. *Nurkka 4* määrittää kuva korkeuden).



### Kynä

Voit hiiren vasemman näppäintä pohjassa pitäen piirtää piirtoalustalle haluamasi kuvion.



### Kahden objektin välinen suhde

Valitse kaksi objektia, jolloin näet ponnahdusikkunassa niiden välisistä suhteista tietoa.



### Todennäköisyyslaskuri

Avaa käyttöösi todennäköisyyslaskurin.



### Funktion analysointi

Valitse haluamasi funktio. Tämän jälkeen auenneessa ikkunassa näkyy funktion tiedot.

## Liuku-työkalu



### Liuku

Liuku on vapaan luvun tai kulman esitysmuoto. Valitse piirtoalueelta tyhjä kohta, johon haluat liu'un sijoittaa. Auenneeseen ikkunaan voit tämän jälkeen määrittellä liu'un nimen, välin [min, max], animaatioaskeleen pituuden, asennon(pysty- tai vaakasuora sekä leveyden (pikseleinä). Liuku ominaisuuden voi kiinnittää vaikka paraabelin yhtälöön Esim:  $y=a x^2$ , missä a on liuku. Tällöin liu'un avulla pystyy kertoimen arvon vaikutusta paraabelin muotoon.



### Luo näytä/piilota-valintaruutu

Valitse piirtoalueelta tyhjä kohta, johon haluat sijoittaa valintaruudun. Nimeä valintaruutu ja valitse objektit, joiden näkymistä haluat säädellä. Tämän jälkeen voit painamalla valintaruutua, joka näyttää tai piilottaa valitsemasi objektit.



### Lisää painike

Valitse piirtoalueelta kohta, johon haluat asettaa painikkeen. Kirjoita auenneeseen ikkunaan painikkeessa lukeva teksti ja täytä GeoGebra Scrip osio.



### Lisää tekstikenttä

Valitse piirtoalueesta paikka tai piste, johon haluat tekstikentän lisätä. Kirjoita auenneeseen ikkunaan haluamasi teksti ja valitse objekti, jonka arvojen haluat näkyvän tekstin jälkeen.

## **Siirrä piirtoaluetta-työkalu**



### Siirrä piirtoaluetta

Vedä piirtoaluetta hiirellä, jolloin origon paikka näytöllä siirtyy. Huom: Voit liikuttaa piirtoaluetta pitämällä *Shift*-näppäintä tai *Ctrl*-näppäintä pohjassa samalla kun siirrät piirtoaluetta hiiren avulla.



### Suurena

Valitse hiirellä piirtoalueen kohta, jonka haluat suurentaa.



### Pienennä

Valitse hiirellä piirtoalueen kohta, jonka hauat pienentää.



### Näytä/piilota Objekti

Valitse objekti näyttääksesi tai piilottaaksesi sen nimen.



### Näytä/piilota nimi

Valitse objekti näyttääksesi tai piilottaaksesi sen nimen



### Kopioi ulkoasu

Voit kopioida ulkoasun muille objekteille (esim värin, koon, viivan tyylin). Tämä tapahtuu aktivoimalla objekti, jonka ominaisuudet haluat kopioida. Tämän jälkeen aktivoi ne objektit, joiden haluat saavan kyseisen ulkoasun.



### Pyyhi objekti

Valitse objekti, jonka haluat poistaa. Huom: Voit käyttää Muokkaa-valikosta löytyvää Peruuta-toimintoa, jos vahingossa poistat väärän objektin

## Algebraikkuna:

Algebraikkunassa näkyvät vapaiden ja riippuvien objektien arvot, koordinaatit ja yhtälöt. Voit luoda ja muuttaa objektien arvoja käyttämällä GeoGebran näytön alareunassa olevaa syötekenttää.

## Syötekenttä:

Syötekentän avulla voit luoda tai muuttaa objekteja. Kirjoitettuaasi objektin määrittelyn syötekenttään paina aina Enter-näppäintä, jolloin määritelty objekti ilmestyy näkyviin piirtoalueeseen ja algebraikkunaan.

### Objektien nimeäminen

Luodessasi uuden objektin syötekentän avulla, voit antaa objektille nimen alla olevin rajauksin.

**Pisteet:** GeoGebrassa pisteen nimen on aina alettava isolla kirjaimella. Esim:  $C = (2,4)$  tai  $P = (1; 180^\circ)$  tai  $Complex = 2 + i$ .

**Vektorit:** Vektorit GeoGebra nimeää aina pienellä kirjaimella. Kirjoita vektorin nimi ja yhtäsuuruusmerkki vektorin suuntakoordinaattien eteen. Esim:  $v = (1,3)$  tai  $u = (3;90^\circ)$

**Suorat ja kartioleikkaukset:** Nämä objektit voidaan nimetä kirjoittamalla nimi ja kaksoispiste yhtälön eteen. Esim:  $g: y = x + 3$  tai  $c: (x-1) + (y-2)^2 = 4$  tai  $hyp: x^2 - y^2 = 2$ .

**Funktiot:** Funktiot voidaan nimetä kirjoittamalla esimerkiksi  $f(x) =$  tai  $g(x) =$  lausekkeen eteen. Esim:  $h(x) = 2x + 4$  tai  $g(x) = x^2$  tai  $trig(x) = \sin(x)$  Huom! Voit myös käyttää merkintää  $f'(x) =$  saadaksesi aikaisemmin määritellyn funktion derivaatan.

**Luvut:** Mikäli haluat nimetä luvun tietyn nimiseksi, kirjoita kirjain ja yhtäsuuruusmerkki luvun eteen. Esim:  $r = 5.32$  HUOM! GeoGebra käyttää pistettä desimaalieroittimena desimaalipilkun asemasta!

**Kulmat:** Kulmat syötetään joko asteina( $^{\circ}$ ) tai radiaaneina(rad). Esim: Kulma  $\alpha$  voidaan kirjoittaa asteina ( $\alpha = 60^{\circ}$ ) tai radiaaneina ( $\alpha = \pi/3$ ), missä  $\pi$  on (pi).

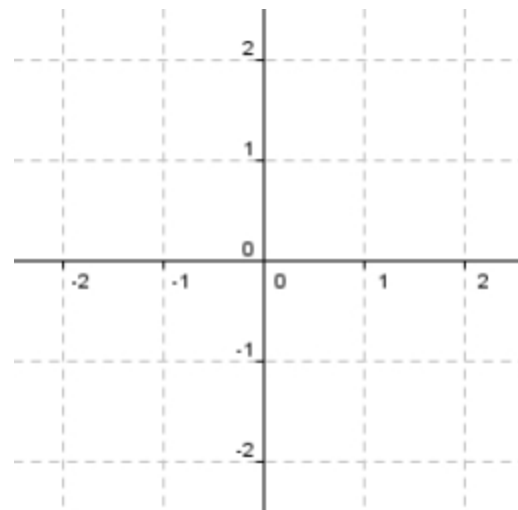
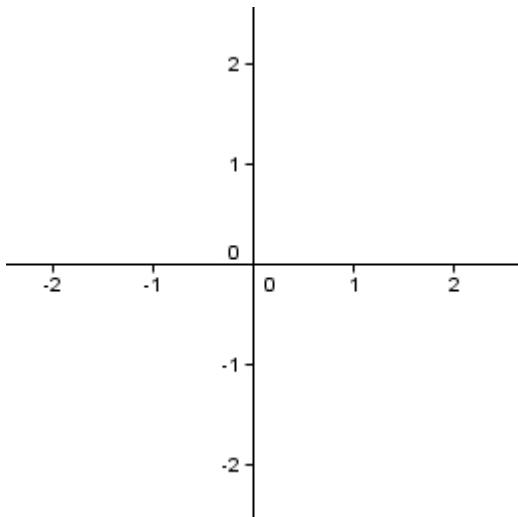
Mikäli et nimeä luomaasi objektia, GeoGebra nimeää sen puolestasi automaattisesti aakkosjärjestyksessä.

## Tehtävät: Yläkoulu

### 7. lk

#### Akselit




Akselit voi laittaa näkyviin tai pois näkyvistä valitsemalla **Näytä** → **Akselit**. Samasta valikosta voit asettaa näkyville myös koordinaatistoruudun **Näytä** → **Koordinaattiruudusto**



#### Kokonaislukujen summa

Tämä Korhosen (2001) luoma demo löytyy valmiina osoitteesta [http://geogebra.fi/ggbtiedostot/HK/kokonaislukujen\\_summa.html](http://geogebra.fi/ggbtiedostot/HK/kokonaislukujen_summa.html), ja se on havainnollinen apu negatiivisilla luvuilla laskentaan.

#### Kulman suuruus

1. Piirrä kulma **puolisuora**-työkalulla  tai **monikulmio**-työkalulla .
2. Valitse **kulma**-työkalu . Mittaa jokaisen kulman suuruus seuraavalla tavalla. Valitse mitattavan kulman toinen sivu, tämän jälkeen valitse vielä kulman toisen sivu. Nyt ohjelma ilmoittaa kulman suuruuden asteina. Tee tämä jokaiselle kulmalle. Jos kulma on yli 180 astetta, valitse kulman sivut myötöpäiväisessä järjestyksessä.
  - Voit pyytää oppilaita arvioimaan kulmien suuruuksia ja sitten ohjelman avulla näyttää kulman suuruus.

#### Risti- ja vieruskulmat

1. Piirrä kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa -työkalun avulla.

2. Merkitse suorien leikkauspiste Piste-työkalun avulla



3. Merkitse vastakkaiset kulmat (siis ristikulmat) **kulma**-työkalun avulla. Valitse ensin piste suorasta, sitten kärkipiste ja sen jälkeen piste toiselta suorasta..



4. Mitä huomaat kulmille tapahtuvan, kun liikutat toista suoraa?

5. Merkitse kaksi jäljelle jäänyttä kulmaa samoin, kuin kohdassa 2.

6. Kokeile jälleen liikuttaa toista suoraa.

7. Mitä voit sanoa vieruskulmien summasta kokeidesi perusteella?

### Kolmion kulmien summa ja oikokulman suuruus

1. Piirrä kolmio **monikulmio**-työkalulla ja selvitä sen kulmien suuruudet työkalulla



sivu, sivu (myötäpäivään).

2. Piirrä (suora) **jana**-työkalulla ja leikkaa jana toisella janalla, jolloin leikkauskohtaan muodostuu neljä kulmaa.



3. Laske edellisen kohdan vieruskulmien suuruuksien summa ja vertaa sitä kolmion kulmien summaan.

### Keskinormaali

1. Piirrä jana **Kahden pisteen välinen jana** -työkalulla



2. Piirrä ympyrä janan toinen päätepiste keskipisteenä ja toinen kehän pisteinä **Ympyrä**:

**keskipiste ja kehän piste** -työkalulla



3. Piirrä toinen ympyrä janan toinen päätepiste keskipisteenä ja toinen kehän pisteinä.

4. Piirrä ympyrän leikkauspisteiden kautta kulkeva suora.

5. Lisää vielä kulman merkki janan ja suoran kulmalle. Valitse **Kulma**-työkalu ja ota kulman pisteiksi päätepiste, suoran ja janan leikkauspiste sekä ympyröiden toinen leikkauspiste.




6. Siirrä toista janan päätepistettä.

7. Miten kulma muuttuu?

## Kulmanpuolittaja

1. Piirrä puolisuora .

2. Piirrä toinen jana alkamaan ensimmäisen päätepisteestä .

3. Piirrä ympyrä , jonka keskipiste on kulman kärkipiste ja piste kehällä jokin janan piste.

4. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on piirretyn janan ja ympyrän leikkauspiste ja piste kehällä on ympyrän ja puolisuoran leikkauspiste.

5. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on piirretyn puolisuoran ja ensimmäisen ympyrän leikkauspiste ja piste kehällä on ensimmäisen ympyrän ja janan leikkauspiste

6. Piirrä puolisuora, joka alkaa kulman kärkipisteestä ja kulkee kohtiin 4 ja 5 ympyröiden leikkauspisteen kautta.

## Monikulmio

Piirrä monikulmio erillisistä janoista käyttäen  **kahden pisteen välinen jana** -työkalua.


Sivupalkissa on näkyvillä piirrettyjen janojen pituudet. Pituuksien avulla oppilaat voivat tässä laskea itse piirin esim. käyttäen laskinta, ohjelma ei laske erillisiä janoja yhteen.

## Säännöllisen kuusikulmion piirtäminen

Piirrä ympyrä **Ympyrä: keskipiste ja säde**-työkalulla  ja valitse ympyrän keskipisteen paikka ja määritä sille haluamasi säde. Piirrä sitten jana **Jana: päätepiste ja pituus**-työkalulla



Sijoita janan toisen päätepisteen ympyrän kehälle ja säädä janan pituudeksi sama kuin säteen

pituus. Siirrä  -työkalulla janan toinen päätepiste myös ympyrän kehälle, jolloin kehän pisteiden välille syntyy jänne. Piirrä vielä viisi samanlaista janaa aloittaen aina edellisen janan päätepisteestä.

## Kolmio ja kulmat

Piirrä piirtoalustalle haluamallasi tavalla terävä-, suora-, tylppä-, kupera- ja oikokulma. Mittaa vielä kaikkien kulmien tarkka suuruus.

Piirrä suorakulmainen kolmio. Puolita tämän kolmion kaikki kulmat. Etsi kulmanpuolittajien leikkauspiste.



## Tasakylkinen ja tasasivuinen kolmio

Käytä työkalua **Jana: päätepiste ja pituus** ja piirrä samasta päätepisteestä kaksi yhtä pitkää janaa. Janat ilmestyvät kuvaan päällekkäin. Siirrä janat erilleen ensimmäisen valikon siirrä toiminnolla. Lisää kuvaan kolmas jana (kahden pisteen välinen jana), joka täydentää kuvion kolmioksi. Määritä kolmion kulmat **Kulma**-työkalulla (ole tarkkana, että kulmat tulevat kolmion sisäpuolelle, jos näin ei ole, niin valitse janat eri järjestyksessä). Mitä huomaat kulmien suuruudesta?

Tartu ensimmäisen **Siirrä**-työkalulla toiseen kantakulmista ja katso mitä kulmille tapahtuu, kun siirrät pistettä.

Siirrä pistettä niin, että kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Mittaa nyt kolmion sivujen pituudet käyttämällä **Etäisyys tai pituus** -työkalua. Mitä huomioita teet sivujen pituuksista?

Piirrä kolmio samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä, mutta tällä kertaa piirrä myös kolmas jana käyttämällä päätepiste ja pituus-toimintoa. Miten saisit nyt kuvioista kolmion siirtämällä janoja? Mittaa kolmion kulmat kuten edellisessä tehtävässä. Mitä huomaat kulmien suuruudesta?

## Kolmion kulmien summa

1. Piirrä monikulmion piirtotyökalun avulla kolmio.



2. Merkitse kolmioon kulmien suuruudet **Kulma**-työkalulla

3. Voit määrittää kolmion kulmien summan kahdella tavalla: Valitse valikosta Näytä Laskentataulukko. Saat tällöin näkyviin taulukon, johon voit siirtää kulmien arvot, ja laskea summan. Voit myös GeoGebran näppäimistöllä (Näytä→Näppäimistö) kirjoittaa syötekenttään kolmion kulmien summan  $\alpha+\beta+\gamma$ , jolloin sivupalkkiin ilmestyy tulos.

4. Ota kiinni yhdestä kulmasta ja venytä kolmiota.

5. Toista kohta 3.

6. Mitä huomaat kolmion kulmien summalle tapahtuvan?

## Kolmion pinta-ala

1. Piirrä teräväkulmainen kolmio, jonka kanta on vaakasuora, **monikulmio**-työkalulla



2. Piirrä kolmiolle normaalisuora, sen huipun kautta **normaali**-työkalulla



3. Merkitse kannan ja normaalisuoran leikkauspiste



4. Mittaa kolmion kanta ja korkeus mittatyökalulla **cm**. Korkeuden saat mitattua painamalla normaalisuoran ja kolmion leikkauspisteitä.



5. Laske laskimella kannan ja korkeuden tulo ja jaa se kahdella.



6. Selvitä työkalulla kolmion pinta-ala. Mitä huomaat ja opit tästä?

## Kolmion pinta-ala 2

1. Piirrä viisi erilaista (erimuotoista, erikokoista) kolmiota.
2. Määritä kaikkien kolmioiden kanta sekä korkeus parhaaksi katsomallasi tavalla ja merkitse niiden pituudet taulukkoon.
3. Laske kanta x korkeus jokaiselle kolmiolle
4. Määritä kaikkien kolmioiden pinta-alat ja merkitse ne myös taulukkoon.

Huomaatko mitään säännönmukaisuutta kahdessa viimeisessä sarakkeessa?

	kanta	korkeus	kanta x korkeus	pinta-ala
kolmio 1				
kolmio 2				
kolmio 3				
kolmio 4				
kolmio 5				

## Suunnikas

1. Aloita määrittelemällä ruudukko, valitse valikosta Näytä→Koordinaattiruudusto.
2. Piirrä suunnikas käyttäen monikulmion piirtotyökalua.



3. Merkitse kuvaan näkyviin kulmien suuruudet **Kulma**-työkalulla
4. Mitä huomaat vastakkaisten kulmien suuruuksista? Entä vierekkäisten?
5. Merkitse kuvaan näkyviin pinta-ala: valitse kulmatyökalun alavalikosta **Pinta-ala**-työkalu



ja valitse piirtämäsi suunnikas.

6. Muokkaa kuviota siirtämällä pisteitä niin, että kanta ja korkeus pysyvät samoina, mutta kulmat muuttuvat.
7. Mitä kuvion pinta-alalle tällöin tapahtuu?

## Koordinaatisto

1. Aseta akselit näkyviin valikosta Näytä→Koordinaattiruudusto. Piirrä kolme pistettä työkalulla. Pisteiden koordinaatit ovat  $(-2, 3)$   $(1,4)$   $(5,-2)$ .



2. Yhdistä pisteet kolmioksi jana-työkalulla



## Koordinaatisto, pisteet, suorat ja janat

1. Merkitse koordinaatistoon pisteet  $A(4,5)$ ,  $B(-3,4)$ ,  $C(0,0)$ ,  $D(-5,-4)$  ja  $E(0,-5)$  ja  $F(3,-2)$
2. Piirrä samaan koordinaatistoon jana AD. Missä pisteessä se leikkaa y-akselin?
3. Piirrä koordinaatistoon suora a, joka kulkee origon ja pisteen  $(2,2)$  kautta.
4. Piirrä koordinaatistoon suora, joka on yhdensuuntainen suoran a kanssa
5. Piirrä normaali suoralle a.

## Peilauksia

- a) Piirrä haluamasi kuvio piirtoalustalle. Peilaa kuvio x-akselin suhteen. Tämä onnistuu



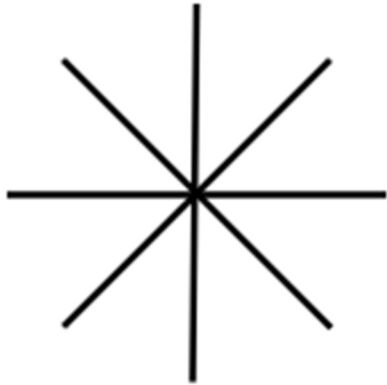
käyttämällä **Peilaus**-työkalua. Klikkaa ensin peilattavaa objektia, jonka jälkeen peilaussuoraa. Peilaa kuvio vielä y-akselin suhteen!

- b) Tehtävänäsi on piirtää kahdeksankulmio, joka on symmetrinen x- ja y- akselin suhteen.

Vinkki: Piirrä kuvasta ensin yksi neljännes, ja peilaa se ensin toisen akselin suhteen. Miten saa kuvasta kokonaan symmetrisen? Joudut tekemään kuvan useammasta janasta ja peilaamaan ne yksi kerrallaan.




Varmista, että valmiissa kuviossa on kahdeksan kulmaa! Jos ei, niin aloita alusta...

- c) Piirrä kuvio, joka on symmetrinen neljän suoran suhteen. Piirrä ensin GeoGebralla neljä suoraa oheisen kuvan mukaisesti.



Piirrä kuvasta ensin yksi kahdeksasosa. Tämän jälkeen peilaa piirtämäsi kuva yhden symmetria-akselin suhteen. Peilaa saatu kuva seuraavan symmetria-akselin suhteen jne.

### Peilaus suoran suhteen

1. Valitse monikulmiotyökalu  ja piirrä haluamasi muotoinen monikulmio.
2. Valitse suoran piirtotyökalu  ja piirrä suora, jonka suhteen haluat peilata piirtämäsi monikulmion. Suoran piirtäminen onnistuu, kun valitset ensin yhden suoran pisteen paikka ja sen jälkeen toisen suoran pisteen paikka, jolloin suora piirtyy näiden kahden pisteen kautta.
3. Valitse peilaustyökalu  valitse monikulmio, jonka haluat peilata painamalla hiiren vasenta näppäintä. Tämän jälkeen siirry suoran kohdalle ja valitse se. Tällöin ohjelma peilaa kuvion valitsemäsi suoran suhteen.

### Peilaus pisteen suhteen

1. Valitse peilaustyökalun alavalikosta  **peilaus pisteen suhteen**-työkalu. Valitse monikulmio, jonka haluat peilata painamalla hiiren vasenta näppäintä. Valitse sen jälkeen sen pisteen paikka, jonka suhteen haluat peilata monikulmion. Tällöin ohjelma peilaa kuvion valitsemäsi pisteen suhteen.

### Siirto tasossa (havainnollistamiseen)

1. Aseta koordinaatisto näkyviin valikosta **Näytä** → **Koordinaattiruudusto**.
2. Piirrä haluamasi kuvio, esimerkiksi monikulmio **Monikulmio**-työkalulla.
3. Valitse **Siirrä**-työkalu, ja siirrä kuviota piirtoalustalla. Havainnoi, miten kärkipisteiden koordinaatit muuttuvat.

## Kierto pisteen suhteen

- a) Piirrä haluamasi muotoinen monikulmio *Monikulmio*-työkalulla



- b) Valitse *Piste*-työkalu



ja piirrä sillä piste.

- c) Kierrä monikulmiota pisteen suhteen haluamasi astemäärä seuraavasti: Valitse peilaustyökalun alavalikosta työkalu *Kierto pisteen suhteen annetun kulman verran*



. Valitse kierrettävä monikulmio, ja valitse sen jälkeen piste, jonka suhteen kierretään.

## 8.Ik

### Pienennökset ja suurenokset

1. Piirrä monikulmio *monikulmio*-työkalulla . Piirrä myös piste, joka on suurenoksen/pienennöksen keskipiste *piste*-työkalulla .
2. Valitse peilaustyökalun alavalikosta *Venytä pisteen suhteen annetulla kertoimella* -työkalu, ja valitse ensin piirretty monikulmio ja sitten piste. Jos haluat suurentaa kuviota, kirjoita laatikkoon luku, joka on suurempi kuin 1 ja jos haluat pienentää peilaamaasi kuviota, kirjoita laatikkoon luku, joka on pienempi kuin 1.

### Suorakulmaisen kolmion sivujen neliöt

1. Piirrä *Monikulmio*-työkalulla suorakulmainen kolmio.
2. Merkitse kolmion sivuille keskipisteet (*Keskipiste*-työkalu).
3. Piirrä kolmion sivuille (kateeteilla ja hypotenuusalle) *Säännöllinen monikulmio* -työkalulla neliöt siten, että kunkin neliön sivu on kunkin sivun mittainen.
4. Selvitä neliöiden pinta-alat.
5. Mikä yhteys on pinta-alojen välillä (vertaa kateeteilla olevien neliöiden alaa hypotenuusalla olevaan)?

### Ympyrä

1. Piirrä koordinaatistoon ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja jonka säde on 2.
2. Piirrä koordinaatistoon ympyrä, jonka keskipiste on pisteessä (2,3) ja jonka säde on 1. Mikä on ympyrän pinta-ala? Mikä on ympyrän kehän pituus?
3. Piirrä haluamasi kokoinen ympyrä piirtoalustalle. Erotta ympyrästä sektori, jonka keskuskulma on 75 astetta.

### Ympyrän kehän ja halkaisijan suhde

1. Piirrä jokin ympyrä ympyrän piirtötyökalulla .
2. Valitse suoran piirtötyökalu  ja piirrä ympyrän keskipisteen kautta suora siten, että klikkaat ensimmäiseksi ympyrän keskipistettä.
3. Merkitse pisteet suoran ja ympyrän kehän leikkauskohtiin *Kahden objektin leikkauspiste* -työkalulla .



4. Mittaa **Etäisyys tai pituus** -työkalun avulla leikkauspisteiden etäisyys (ympyrän halkaisija).
5. Mittaa kehän pituus klikkaamalla ympyrän kehää Etäisyys tai pituus -työkalulla.
6. Tutki kuinka moninkertainen kehän pituus on halkaisijan pituuteen verrattuna.

### Ympyrän pinta-ala, piiri ja kaaren pituus



1. Piirrä ympyrä



2. Selvitä ympyrän pinta-ala -työkalulla siten, että painat ympyrän kehällä olevaa pistettä. **Pinta-ala**-työkalu löytyy **kulma**-työkalun alavalikosta.



3. Selvitä ympyrän piiri -työkalulla siten, että painat ympyrän kehällä olevaa pistettä. **Etäisyys tai pituus**-työkalun löydät **kulma**-työkalun alavalikosta



4. Piirrä ympyrälle kaari työkalulla siten, että valitset ympyrän keskipisteen ja sen jälkeen kaksi ympyrän kehäpistettä vastapäivään.
5. Piirtämäsi kaaren pituus on näkyvillä sivupalkissa.

### Kehäkulman koon vaikutus sektorin kaaren pituuteen



1. Piirrä ympyrä -työkalulla.



2. Merkitse näkyviin ympyrän kehän pituus mittatyökalulla



3. Piirrä ympyrälle sektori siten, että valitset ensin ympyrän keskipisteen ja sitten kaksi ympyrän kehän pistettä vastapäivään.

4. Piirtämäsi kaaren pituus ilmestyy näkyviin sivupalkkiin.



5. Merkitse kehäkulma kulma-työkalulla valitsemalla kolme pistettä järjestyksessä sivu, kärkipiste, sivu.



6. Siirrä kehäkulman toista pistettä **siirto**-työkalulla ja tee havainnot, miten kehäkulma vaikuttaa sektorin kaaren pituuteen. Vertaa sitä myös ympyrän kehän pituuteen.

## Ympyrän ulkopuolelle ja sisäpuolelle piirrettyjen neliöiden pinta-alojen suhde



1. Piirrä ympyrä **Suora**-työkalulla.
2. Piirrä ympyrän sisäpuolelle neliö. Esimerkiksi, piirrä suora ympyrän keskipisteen A ja



kehäpisteen B kautta **Suora**-työkalulla. Piirrä seuraavaksi suoralle normaali, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta (**Normaali**-työkalu). Merkitse nyt kaikki piirretyn suoran ja normaalin leikkauspisteet ympyrän kanssa. Yhdistä nämä pisteet neliöksi monikulmiotyökalulla.

3. Valitse normaalityökalun alavalikosta **Keskinormaali**-työkalu, ja piirrä neliön kahdelle vierekkäiselle sivulle keskinormaalit.
4. Merkkää kaksi vierekkäistä keskinormaalien ja ympyrän kehän leikkauspistettä pistetyökalun



alavalikosta löytyvällä **Kahden objektin leikkauspiste** -työkalulla

5. Valitse **Yhdensuuntainen**-työkalu normaalityökalun alavalikosta. Piirrä leikkauspisteiden vieressä olevien neliön sivujen suuntaiset suorat leikkauspisteiden kautta.
6. Merkitse kohdassa 5 piirrettyjen suorien leikkauspisteet ja yhdistä nämä pisteet neliöksi monikulmiotyökalulla.
7. Neliöiden pinta-alat näkyvät sivupalkissa – voit myös erikseen mitata ne **Pinta-ala**-työkalulla.
8. Laske neliöiden pinta-alojen suhde esimerkiksi laskentataulukossa (Näytä → Laskentataulukko). (Vastaus: 2)

- Tehtävän voi ottaa esille Pythagoraan lauseen sovelluksien yhteydessä, jos haluaa esittää haastavampia tehtäviä. (Aluksi tiedetään vain ympyrän säde.)

## Kolmion ja ympyrän välisiä yhteyksiä

1. Valitse **Monikulmio**-työkalu ja piirrä haluamasi kolmio.



2. Piirrä kolmion jokaiselle sivulle keskinormaali **Keskinormaali**-työkalulla, valitsemalla kyseinen sivu.
3. Valitse **Kahden objektin leikkauspiste** -työkalu ja piirrä piste keskinormaalien leikkauspisteeseen.
4. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on keskinormaalien leikkauspiste ja säde on etäisyys leikkauspisteestä johonkin kolmion kärkipisteistä. Mitä huomaat?
5. Liikuttele kolmion kärkipisteitä. Mitä huomaat?

Täydennä edellinen kuvio Eulerin ympyräksi:

6. Valitse **Normaali**-työkalu. Piirrä normaalisuora kulkemaan kolmion kärkipisteen kautta. Tee normaalisuora jokaiselle kolmion sivulle.



7. Muuta normaalisuorien väriksi tummanvihreä klikkaamalla oikealla hiiren näppäimellä → Ominaisuudet → Väri.
8. Valitse **Kahden objektin leikkauspiste** -työkalu ja piirrä piste muodostuneiden suorien leikkauspisteeseen. Nimeä piste pisteeksi H.
9. Valitse **Keskipiste**-työkalu ja merkitse kolmion jokaiselle sivulle sivun keskipiste.
10. Nimeä pisteet klikkaamalla hiiren oikealla näppäimellä → Nimeä uudelleen. Anna nimiksi A', B', C'.
11. Piirrä keskusjanat **Kahden pisteen välinen jana** -työkalulla jokaisesta kärkipisteestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen.
12. Värjää keskusjanat siniseksi, vrt. vaihe 7.
13. Merkitse kolmion sisälle muodostunut piste (painopiste) **Piste**-työkalulla ja nimeä se uudelleen pisteeksi G.
14. Piirrä suora pisteiden O ja H kautta. Mitä huomaat?
15. Piirrä kolmio A'B'C' työkalulla **Monikulmio**-työkalulla.
16. Piirrä kolmion A'B'C' sivujen keskinormaalit työkalulla **Keskinormaali**. Piirrä piste muodostuneeseen keskinormaalien leikkauspisteeseen **Piste**-työkalulla.
17. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on edellisessä vaiheessa muodostunut piste ja säde etäisyys pisteeseen A'.
18. Värjää ympyrä punaiseksi ja vahvista ympyräviivan paksuus Ominaisuudet-valikosta. Tätä ympyrää sanotaan Eulerin ympyräksi ja janaa H-G-O sanotaan Eulerin janaksi.

## 9.Ik

### Trigonometrisiä funktioita

1. Piirrä suorakulmainen kolmio *monikulmio*-työkalua käyttäen .
2. Mittaa jokaisen kulman suuruus . Valitse kulman kylki ja sitten kulman toinen. Valitse kulman kyljet myötäpäivään. Nyt ohjelma ilmoittaa kulman suuruuden asteina. Tee tämä jokaiselle kulmalle.
3. Valitse *kulma*-työkalun alavalikosta *Etäisyys tai pituus*-työkalu . Mittaa kolmion yhden sivun pituus valitsemalla mitattava sivu.
4. Laske muiden sivujen pituudet laskimen avulla käyttäen trigonometrisiä funktioita.
5. Tarkista mittatyökalulla sivujen pituudet, kuten kohdassa 3.
6. Liikuttele yhtä kolmion kärkipisteistä  työkalulla, jolloin kolmion muoto muuttuu. Tarkastele kulmien suuruuksien ja sivujen pituuksien muutoksia.

### Suora koordinaatistossa

1. Aseta koordinaatisto näkyviin valikosta Näytä → Koordinaattiruudusto.
2. Piirrä koordinaatistoon suora  $y = 2x + 1$ . Laske ensin muutama piste suoralta, esim.: (0,1) ja (1,3).
3. Merkitse nämä pisteet koordinaatistoon *Piste*-työkalulla ja piirrä niiden kautta kulkeva suora *Suora kahden pisteen kautta* -työkalulla.
4. Merkkää kyseisen suoran kulmakerroin näkyviin *Kulmakerroin*-työkalulla, joka löytyy kulmatyökalun alavalikosta.
5. Voit piirtää myös toisen suoran  $y = -2x + 3$  ja tutkia missä pisteessä nämä suoran leikkaavat toisensa.

### Suorien rajaama kolmio

- a) Laske suoran  $2x - 3y = 3$  kulmakerroin.

Kirjoita yhtälö alalaidan komentoikkunaan ja paina enter. Valitse *Kulmakerroin*-työkalu, ja napsauta hiirellä suoraa. Ohjelma antaa kulmakertoimeksi  $m = 0,67$

- b) Laske edellisen suoran ja suoran  $y = -3x + 10$  välinen kulma.


Kirjoita suoran yhtälö komentoikkunaan ja paina enter. Valitse *Suorien välinen kulma* -työkalu, ja napsauta suoraa niin, että ohjelma näyttää terävän kulman. Vastaus  $74,74^\circ$ .

- c) Laske vielä suorien ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

Valitse **Monikulmio**-työkalu, ja valitse kolmion pisteiksi suorien ja x-akselin leikkauspisteet, kunnes alue värjäytyy. Sitten valitse **Pinta-ala**-työkalu ja napsauta aluetta. Ohjelma antaa pinta-alaksi  $ABC = 0,92$ .

## Suoran yhtälön $y=kx+b$ kertoimet

Tarkoituksena on tehdä havainnollistava esitys siitä, miten kulmakerroin  $k$  ja vakiotermi  $b$  vaikuttavat suoran kulkuun koordinaatistossa.

1. Valitse toiminto  **Liuku**.
2. Näpätä piirtoaluetta kohdassa, johon haluat laittaa liu'un.
3. Nimeä liuku haluamallasi tavalla. (Tässä tapauksessa liu'ulla säädetään suoran kulmakerrointa, joten se nimetään kirjaimella  $k$ .) Syötä haluamasi lukuväli kohtiin min ja max.
4. Tee toinen liuku samalla tavalla suoran vakiotermitteille  $b$ .
5. Syötä suoran yhtälö näytön alalaidassa sijaitsevaan syöttökenttään muodossa  $y=kx+b$ . Huomaa, että  $k$ :n ja  $x$ :n väliin pitää jättää välilyönti!
6. Valitse nuolitoiminto **Siirrä** ylärivin valikosta. Nyt voit säätää kulmakerrointa ja vakiotermejä liu'uista. Vasemmassa reunassa on näkyvissä ajan tasalla oleva suoran yhtälö.
7. Klikkaa suoraa hiiren oikealla näppäimellä. Täältä voit muokata suoran yhtälön esitysmuotoa ( $y=kx+b$  tai  $ax+by=c$ )

## Toisen asteen yhtälö

Käyttämällä edellisessä tehtävässä esiteltyjä liukuja on helppo tutkia myös toisen asteen funktion kulkua koordinaatistossa.

Tutkitaan yhtälöä  $y = ax^2 + c$ . Miten kertoimet  $a$  ja  $c$  vaikuttavat kuvaajaan muotoon ja sijaintiin koordinaatistossa?

1. Luo liu'ut parametreille  $a$  ja  $c$  liukutoiminnolla.
2. Entäpä, jos yhtälö onkin muotoa  $y = ax^2 + bx + c$ . Miten  $b$  vaikuttaa kuvaajaan?

## Tehtävät: Lukio

### Suora ja piste

Pisteen saa piirrettyä valitsemalla työkalun



Suoran saa piirrettyä valitsemalla työkalun



Klikkaamalla pöytää saa kiinnitettyä yhden suoran pisteen. Suoraa voi kääntää hiiren avulla ja klikkaamalla pöytää saa kiinnitettyä suoran toisen pisteen.

Voit piirtää suoralle normaalin



työkalulla tai yhdensuuntaisen suoran valitsemalla

painikkeen



Voit peilata pisteen suoran suhteen käyttäen painiketta



: piirrä ensin piste, jonka haluat peilata. Valitse sitten suora, jonka suhteen peilataan.

Pisteen etäisyyden suorasta (tai pisteestä) saat valitsemalla työkalun



Valitse ensin piste, sitten suora (tai piste).

### ***Pisteiden ja suorien piirtämistä (Sopii opettajalle tunnilla havainnollistamiseen)***

1. Piirrä jokin suora.
2. Valitse suoralta kaksi eri pistettä, P ja Q.

3. Piirrä työkalun



avulla suoralle normaali, joka kulkee pisteen P kautta.

4. Valitse normaalilta kaksi eri pistettä



, N ja M, siten, että niiden etäisyys pisteestä P on

yhtä suuri. Yhtäsuuruus saadaan peilaamalla työkalun



avulla.

5. Piirrä pisteistä N ja M janat pisteeseen Q



.

6. Ovatko janat yhtä pitkät? Tutki työkalun



avulla.

## Suoran kulmakerroin

Määritä sellaisen suoran kulmakerroin, joka kulkee kahden ympyrän leikkauspisteiden kautta, kun toisen ympyrän keskipiste on  $(-4,7)$  ja toisen  $(9,-5)$  ja molempien ympyröiden säteen pituus on 12. (Vastaus: 1,08)

## Pisteen etäisyys suorasta

Laske pisteen etäisyys suorasta  $2x-y-4=0$


1.  $(0,0)$
2.  $(-1,5)$

## Origon etäisyys suorasta


Kun kuljettiin pitkin erästä suoran  $y=3x$  suuntaista suoraa, niin origo ohitettiin kahden yksikön etäisyydeltä. Mitä suoraa pitkin kuljettiin?

(tehtävä 298, s.131, Pitkä matematiikka MAA4)


## Suorien kohtisuoruus

1. Piirrä suora  $l$ , joka kulkee pisteiden  $(-5, -1)$  ja  $(1,2)$  kautta työkalulla . Pisteet voit tarkentaa kirjoittamalla syöttökenttään  $A=(-5,-1)$  ja painamalla enter. Vastaavasti myös  $B=(1,2)$ . Suoran saa piirrettyä myös kätevästi kirjoittamalla syöttökenttään:  $l: -x + 2y = 3$  ja painamalla sitten enter

2. Piirrä samalla tavalla suora  $m$ , joka kulkee pisteiden  $(-2,3)$  ja  $(2,-5)$  kautta. Vastaavasti syöttökenttään voi kirjoittaa  $m: 2x + y = -1$

3. Kuinka suuri on suorien välinen kulma ? Lisää ensin piste suorien leikkauspisteeseen

 **piste**-työkalulla ja sen jälkeen käytä **kulma**-työkalua, valitse ensin kulman kyljeltä jokin piste, sitten kulma ja sen jälkeen kulman toiselta kyljeltä toinen piste (valitse pisteet vastapäivään)

4. Määritä suorien kulmakertoimet . Kulmakertoimen arvo tulee lukemaan sivupalkkiin. Mitä huomaat kulmakertoimien tulosta?

## Suoran yhtälö määrittäminen 1

Muodosta suoran yhtälö, kun suora

1. kulkee pisteen  $(3,4)$  kautta ja suoran kulmakerroin on  $\frac{1}{4}$ .
2. kulkee pisteiden  $(5,-2)$  ja  $(-2,4)$  kautta.

### **Suoran yhtälön määrittäminen 2**

Suora, jonka kulmakerroin on -2, rajoittaa yhdessä koordinaattiakselien kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 9. Määritä suoran yhtälö.

(tehtävä 183, s. 83, Pitkä matematiikka MAA4)

### **Suoran yhtälön määrittäminen 3**

Määritä suunnikkaan, jonka kärkipisteet ovat pisteissä (5,2), (-1,2), (8,5) ja (2,5), lävistäjien leikkauspisteen kautta kulkevan suoran yhtälö, joka on kohtisuorassa suunnikkaan sivua. (Vastaus:  $x=3$  ja  $x+y=7$ )

### **Suoran yhtälön määrittäminen 4**

Olkoon  $A=(-5,-1)$  ja  $B=(-6,4)$ .

a) Määritä janan AB suuntaisen suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteen (1, -7).

b) Määritä janan AB keskinormaalin yhtälö.

Ratkaisu: Kirjoita syötekenttään  $A=(-5,-1)$  ja paina enter. Tee samoin pisteelle B. a) Piirrä 3. toimintonäppäimen alakohdalla Suora kahden pisteen kautta suora pisteiden A ja B kautta. Merkitse piste  $C=(1,-7)$ . Valitse 4. toimintonäppäimen alakohta Yhdensuuntainen. Klikkaa pistettä C ja sen jälkeen suoraa. Ohjelma piirtää yhden suuntaisen suoran ja ilmoittaa suoran yhtälöksi  $5x+y=-2$ . b) Valitse 4. toimintonäppäimen alakohta Keskinormaali ja klikkaa pisteitä A ja B. Ohjelma piirtää keskinormaalin ja ilmoittaa sen yhtälöksi  $x-5y=-13$ .

### **Suorien leikkauspiste**

Määritä suorien  $y=3x-4$  ja  $y=-2x+2$  leikkauspiste. (Vastaus: (1.2,-0.4))

### **Yhtälöparin ratkaiseminen**

Ratkaise yhtälöpari 
$$\begin{cases} -2x - 3y = 2 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$$
.


Ratkaisu: Kirjoita syötekenttään yhtälö  $-2x-3y=2$  ja paina enter. Tee samoin toiselle yhtälölle. Valitse 2. toimintonäppäimestä alakohta Kahden objektin leikkauspiste. Klikkaa suoraa ja leikkauspiste (-4,2) tulee näkyviin vasemmalle.

### **Suoran normaalin yhtälö**

Suora s kulkee pisteiden (-2,3) ja (2,-5) kautta. Suora t leikkaa suoran s kohtisuoraan pisteessä (-1,1). Muodosta suoran t yhtälö.

## Ympyrä



Ympyrän piirtotyökalu on painike . Ympyrän voi piirtää useilla eri tavoilla, keskipiste ja kehäpiste -työkalulla, keskipiste ja säde -työkalulla, harppityökalulla tai kolme kehän pistettä -työkalulla. Nämä kaikki löytyvät ympyrän piirtotyökalu -valikosta.

Ympyrän yhtälö näkyy automaattisesti sivupalkissa. Tarvittaessa ympyrän säteen saa näkyviin esimerkiksi piste objektilla -työkalun avulla. Valitse jokin piste ympyrän kehällä. Tämän jälkeen



yhdistä valittu piste ympyrän keskipisteeseen kahden pisteen välinen jana -työkalulla

### **Ympyrän keskipiste**

1. Piirrä jokin ympyrä. Miten saat selvitettyä ympyrän keskipisteen, jos se ei ole näkyvässä. (Apuna voi käyttää esimerkiksi kolmiota ja keskinormaalia).

### **Ympyrän säde**

Kuinka monta r-säteistä ympyrää tarvitaan vähintään, jotta niistä muodostetulla ketjulla voitaisiin ympäröidä r-säteinen ympyrä? Jokainen ketjun ympyrä sivuaa kahta viereistä ketjun ympyrää. Ympäröivän ketjun ympyrät saavat sivuta keskellä olevaa r-säteistä ympyrää.

(tehtävä 241, s.107, Pitkä matematiikka MAA3)

### **Ympyrän tangentti**

Määritä ympyrälle, jonka keskipiste on  $(2,2)$  ja säteen pituus on 2, piirrettyjen tangenttien, jotka kulkevat pisteen  $(8,2)$  kautta, kulmakertoimet.

(Vastaus: 0,35 ja -0,35 )

### **Ympyrä**

Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on  $(4,3)$  ja säde on 3. Määritä pisteeseen  $(9,4)$  piirrettyjen tangenttien yhtälöt ja kulmakertoimet.

Ratkaisu: Kirjoita ympyrän yhtälö komentoikkunaan ja paina enter. Kirjoita komentoikkunaan  $A=(9,4)$  ja paina enter (pisteen voi merkitä myös liu'uttamalla hiirtä). Valitse normaalityökalun alavalikosta **Tangentit** -työkalu, valitse ensin piste ja sitten ympyrä, jolloin ohjelma piirtää tangenttisuorat ja ilmoittaa algebraikkunassa niiden yhtälöt. Valitse vielä **Kulmakerroin**-työkalu kulmatyökalun alavalikosta ja napsauta suoraa, niin ohjelma ilmoittaa tangenttien kulmakertoimet,  $m=-0,46$  ja  $m_1=1,09$ .

### **Ympyrän tangenttien tangenttikulma**


Origokeskiselle ympyrälle, jonka säde on 2, piirretään tangentit pisteeseen  $(0,5)$ . Määritä tangenttikulma.

Ratkaisu: Kirjoita syötekenttään Ympyrä $[(0,0),2]$  ja paina enter. Kirjoita syötekenttään  $A=(0,5)$  ja paina enter. Valitse normaalityökalun alavalikosta **Tangentit** -työkalu ja klikkaa pistettä A ja

ympyrää. Ohjelma piirtää tangentit. Valitse **Kulma**-työkalu. Klikkaa suoria ja kulmaksi saadaan 47,16 astetta.

### **Keskuskulman ja tangenttikulman välinen yhteys**

1. Piirrä mielivaltainen ympyrä .

2. Merkitse piste A jonnekin ympyrän ulkopuolelle .

3. Määritä tangentit, jotka sivuavat ympyrää ja kulkevat pisteen A kautta .

4. Merkitse ympyrän ja tangenttien leikkauspisteet.

5 Määritä ympyrän keskuskulma ( $\alpha$ ) ja tangenttikulma ( $\beta$ ).

Määritä kulma  $\gamma = \alpha + \beta$ . Liikuttele pistettä A ja vaihtele ympyrän kokoa. Mitä huomaat?

### **Ympyrän säteen ja tangentin kohtisuoruus**

1. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on A ja eräs kehän piste B, työkalulla .

2. Piirrä ympyrän säde AB työkalulla .


3. Piirrä ympyrän tangenti pisteeseen B työkalulla .

4. Valitse jokin piste C ympyrän tangentilta, ja merkitse kulma CBA työkalulla .  
Huomataan, että tangenti on kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan.

### **Etäisyys pisteestä**

1. Tehtävänä on määrittää ne pisteet, joiden etäisyys pisteestä (0,9) on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys origosta.

2. Merkitse pisteet (0,9) ja (0, 0) koordinaatistoon (kirjoita syöteriville pisteen koordinaatit). Huomataan, että piste (0,3) toteuttaa ehdon. Piirrä ympyrä, joka kulkee pisteen (0,3) kautta ja

jonka keskipiste on (0,0) työkalulla .

4. Piirrä pisteen (0,3) kautta ympyrä, jonka keskipiste on y-akselilla ja säde on kohdassa 2 piirretyä ympyrän halkaisijan mittainen. Näin saadun ympyräkäyrän pisteet toteuttavat ehdon.



## **Piste ympyrällä**

1. Piirrä ympyrä, joka toteuttaa yhtälön  $(x-2)^2 + (y+7)^2=16$
2. Tutki, ovatko pisteet A(7,-11), B(-3,7) ja C(2,-3) ympyrällä, ympyrän sisäpuolella vai ympyrän ulkopuolella.

## **Ympyrän yhtälö**

Muodosta yhtälö ympyrälle, jonka

1. keskipiste on (-4,3) ja säde 8
2. keskipiste on (0,-7) ja säde 16
3. keskipiste on origo ja säde  $\sqrt{10}$

(tehtävä 87,s.46, Pitkä matematiikka MAA4)

## **Ympyrän yhtälö: Ympyrä kahdeksankulmion sisällä**

Määritä sellaisen mahdollisimman suuren ympyrän yhtälö, joka on piirretty säännöllisen kahdeksankulmion sisään, jonka kaksi kärkipistettä ovat pisteissä A=(5,1) ja B=(1,2) ja kuvio on lähes kokonaan ensimmäisessä neljänneksessä.

Ratkaisu: Kirjoita syötekenttään A=(5,1) ja paina enter. Tee samoin pisteelle B. Valitse **Säännöllinen monikulmio** -työkalu monikulmiotyökalun alavalikosta ja klikkaa pisteitä A ja B. Kirjoita avautuvaan ruutuun 8. Ohjelma piirtää säännöllisen kahdeksankulmion. Valitse **Kahden pisteen välinen jana** -työkalu ja piirrä kaksi mahdollisimman pitkää janaa kahdeksankulmion kärkipisteiden välille. Etsi **Kahden objektin leikkauspiste** -työkalulla janojen keskipiste (tämä on siis ympyrän keskipiste). Etsi **Keskipiste**-työkalulla yhden kahdeksankulmion sivun keskipiste. Piirrä **Ympyrä: keskipiste ja kehän piste**-työkalulla ympyrä, joka kulkee keskipisteen ja sivun keskipisteen kautta.

Ympyrän yhtälöksi saadaan  $(x - 4.20711)^2 + (y - 6.32843)^2 = 24.77082$ .

## **Ympyrän yhtälö kolmen kehän pisteen avulla**

Määritä pisteiden (3,4), (12,-2) ja (10,3) kautta kulkevan ympyrän yhtälö.

Ratkaisu: Kirjoita syöttökenttään A=(3,4) ja paina enter. Tee samoin kahdelle muulle pisteelle. Valitse työkalu Ympyrä: kolme kehän pistettä. Valitse pisteet ja ohjelma ilmoittaa algebraikkunassa ympyrän yhtälön  $(x - 5.77)^2 + (y + 1.59)^2 = 38.95$

## **Toisiaan leikkaavat ympyrät**

Piirrä toisiaan leikkaavat samansäteiset ympyrät siten, että toisen keskipiste on toisen kehällä

1. Piirrä ympyrä, jonka säde on 6 ja keskipiste (0,0)
2. Piirrä ympyrä, jonka säde on 6 ja keskipiste (6,0)
3. Määritä leikkauspinta-ala (vihje: leikkausaluetta voidaan approksimoida monikulmiolla).

## **Toisiaan leikkaavat ympyrät 2**

Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Pisteestä A piirretään molempiin ympyröihin halkaisijat AC ja AD. Osoita, että pisteet B, C ja D ovat samalla suoralla.

## **Ympyrän ja kolmion pinta-alat**

Laske ala, joka jää jäljelle, kun ympyrän, jonka keskipiste on (0,1) ja säde on 4, alasta vähennetään sellaisen kolmion ala, jonka kärjet ovat pisteissä (-2,0), (0,4) ja (3,0).

(Vastaus: 40,27)

## **Kehäkulma ja keskuskulma**

Piirrä ympyrä ja merkitse siihen keskipiste ja neljä kehäpistettä A, B, C ja D. Piirrä janat keskipisteestä kahteen kehän pisteeseen (A ja B) ja merkitse niiden välinen kulma (keskuskulma). Piirrä pisteestä C janat pisteisiin A ja B ja toista sama pisteelle D. Merkitse saadut kulmat (kehäkulmat). Nyt voit siirtää pisteitä kehällä ja tarkkailla samalla, miten kulmien arvot käyttäytyvät. Voit näin havainnollistaa keskuskulman ja kehäkulman suhdetta. Lisäksi voit osoittaa kehäkulmien olevan pisteestä C riippumatta aina yhtä suuret.

## **Ympyrän keskuskolmio**

Määritä ympyrän, jonka keskipiste on (1,6) ja säteen pituus 5, sellaisen keskuskolmion ala, jonka määrää keskuskulma, joka on 67 astetta.

Ratkaisu: Kirjoita syöttökenttään ympyrä[(1,6),5] ja paina enter. Merkitse keskipiste kirjoittamalla syötekenttään A=(1,6). Valitse **Piste**-työkalu ja klikkaa jotain kohtaa ympyrällä. Nyt kulmatyökalun alavalikosta työkalu **Kulma: koko annetaan** ja klikkaa kehälle merkitsemääsi pistettä ja keskipistettä. Tämän jälkeen avautuu ruutu, mihin voit syöttää 67 astetta. Näin kulma tulee piirretyksi ja kehälle tulee uusi piste. Nyt yhdistä kehäpisteet ja keskipiste **Monikulmio**-työkalulla kolmioksi. Valitse kulmatyökalun alavalikosta **Pinta-ala**-työkalu ja klikkaa kolmiota. Kolmion pinta-ala tulee 11,51.

## **Ympyrän kaarevuussäde**

Joen leveys on 40 m ja syvyys 6 m. Mikä on joen pohjan kaarevuussäde r, kun pohjan poikkileikkaus on likimain ympyränkaaren muotoinen?

Ratkaisu: Merkitään koordinaatistoon kolme pistettä, A(0,0), B(40,0) ja C(20,-6). Piirretään näistä pisteistä ympyrä, ja ohjelma ilmoittaa ympyrän yhtälö  $(x-20)^2 + (y-30,33)^2 = 1320,11$ . Kaarevuussäteeksi saadaan  $r = 36,33$ . Algebrallisesti saadaan  $r^2 = (r - 6)^2 + 20^2$ , josta  $r = 361/3$ .

## **Piste ympyrän sisällä**

1. Ympyrän keskipiste on (4,0) ja säde 4. Ympyrän sisällä olevan pisteen P(x,y) kautta piirretään pisteen P kautta kulkevaa ympyrän sädettä vastaan kohtisuora jänne. Minkä käyrän muodostavat ne pisteet P(x,y), joille jänneen puolikkaan PQ pituus on yhtä suuri kuin pisteen P etäisyys pisteestä (2,0)?

2. Pisteen  $P(x,y)$  kautta piirretään edelleen (jos mahdollista) tangentti ympyrälle, jonka keskipiste on  $(2,0)$  ja säde 2. Olkoon sivuamispiste  $R$ . Minkä käyrän muodostavat ne pisteet  $P(x,y)$ , joille janan  $PR$  pituus on yhtä suuri kuin jänteen puolikkaan  $PQ$  pituus?

(tehtävä 124, s.55, Pitkä matematiikka MAA4)

### ***Kolmio ympyröiden keskipisteistä***

Olkoon kolmen toisiaan sivuavan ympyrän säteet 2, 3 ja 5 Tehtävänä on määrittää keskipisteistä piirretyn kolmion suurin kulma.



**Ratkaisu:** Piirretään ympyrät vierekkäin  $x$ -akselille syöttämällä niiden yhtälöt yksitellen komentoikkunaan: pienimmän ympyrän yhtälö on  $x^2 + y^2 = 4$ . Koska seuraavan ympyrän keskipiste on  $(5,0)$ , yhtälö on  $(x-5)^2 + y^2 = 9$ . Suurimman ympyrän yhtälö kirjoitetaan ensin  $x^2 + y^2 = 25$ , ja siirretään se sivuamaan kahta pienempää ympyrää. Tämän jälkeen piirretään ympyröille keskipisteet (2. toimintonäppäin) ja 7. toimintonäppäimellä suurin kulma, joka on kulma  $CBA$ . Ohjelma antaa kulmaksi  $81,97^\circ$ . Tarkistetaan kulma vielä algebrallisesti kosinilauseella:  $8^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$ , josta saadaan  $\alpha = 81,79^\circ$ . Havaitaan, että graafinen ratkaisu ei ole aivan tarkka.

## Paraabeli

### Paraabelin yhtälö

1. Paraabelin voi piirtää kirjoittamalla syöttökenttään paraabelin yhtälön: Esim.  $a: x^2 + 2y = 2$  ja painamalla sitten enter.

2. Paraabelin voi myös piirtää valitsemalla **paraabeli**-työkalun . Valitse ensiksi paraabelin polttopiste ja sen jälkeen johtosuora. Nyt ohjelma piirtää paraabelin

3. Merkitse piste paraabelille -työkalulla. Käyttämällä **siirrä**-työkalua  voit nyt liikuttaa pistettä paraabelin käyrää pitkin ja nähdä pisteen arvot sivupalkissa.

4. Valitse ellipsi-työkalun alavalikosta kartioleikkaus-työkalu . Merkitse koordinaatistoon pisteet (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) jolloin saat paraabelin.

5. Paraabelin yhtälö ilmestyy näkyviin sivupalkkiin. Voit myös yrittää määrittää paraabelin yhtälön itse.

6. Tee toinen paraabeli, jonka pisteet ovat (-3, 3), (2, 2), (5, 1), (5, -1), (-3, -3). Toista kohdat 4 ja 5.

### Paraabelin yhtälön määrittäminen

Piirrä paraabeli, joka kulkee pisteiden A(-4,2), B(-3,1), C(0,0), D(3,1) ja E(4,2) kautta ja määritä sen yhtälö.

### Paraabelin avautumissuunta ja leikkauspiste

Mikä paraabelin  $x=y^2-y+5$  avautumissuunta on? Missä pisteissä paraabeli leikkaa

1. x-akselin
2. y-akselin?

### Paraabelien leikkauspisteet

Missä pisteissä paraabelit  $y = -x^2 - x + 2$  ja  $y = x^2 - 3x - 2$  leikkaavat toisensa?

(tehtävä 310, s.138, Pitkä matematiikka MAA4)

### Suoran ja paraabelin leikkauspiste

Määritä suoran  $y=2x-5$  ja paraabelin  $y=2x^2-8x+3$  leikkauspisteet.

Ratkaisu: Kirjoita syötekenttään  $2x-5$  ja paina enter. Tee samoin paraabelin yhtälölle. Valitse **Kahden objektin leikkauspiste** -työkalu ja merkitse pisteet. Leikkauspisteiksi saadaan (1,-3) ja (4,3).


### **Paraabelin ja x-akselin leikkauskohdat**

Määritä paraabelin  $y=3x^2-6x+1$  ja x-akselin leikkauskohdat.

Ratkaisu: Kirjoita syötekenttään paraabelin yhtälö ja paina enter. Valitse **Kahden objektin leikkauspiste** -työkalu. Klikkaa x-akselia ja paraabelia ja leikkauspisteet  $A=(1.82,0)$  ja  $B=(0.18,0)$ .

## Monikulmiot



Monikulmion voi konstruoida piirtotyökalulla . Pudotusvalikosta voi valita myös säännöllisen monikulmion.

### **Monikulmion kulmien summa**

1. Valitse **Monikulmio**-piirtotyökalu ja sen alta valikosta **Säännöllinen monikulmio** -työkalu




2. Piirrä monikulmio seuraavalla tavalla. Määritä ensin monikulmion kaksi pistettä. Syötä haluamasi kulmien lukumäärä. Monikulmiota voi kiertää ja sen kokoa voi muuttaa siirtämällä sen kärkipisteitä.
3. Piirrä 5-kulmio, 7-kulmio ja 8-kulmio piirtotyökalulla.
4. Valitse monikulmiosta yksi kulma ja piirrä sieltä janat kaikkiin muihin kulmiin. Moneenko kolmioon monikulmiot jakaantuivat?
5. Mitkä ovat monikulmioiden kulmien summat?


Päättele yleinen kaava n-kulmion kulmien summalle.

### **Säännöllinen kymmenkulmio**



1. Piirrä säännöllinen kymmenkulmio **säännöllinen monikulmio** -työkalulla . Valitse ensin tasosta kaksi pistettä, jotka muodostavat monikulmion sivun pituuden. Sen jälkeen kirjoita ilmestyvään ikkunaan montako sivua monikulmiolle haluat, jolloin ohjelma piirtää haluamasi säännöllisen monikulmion.



2. Määritä kymmenkulmion keskipiste **Uusi piste** -valikon **Keskipiste**-työkalulla . Piirrä tasakylkinen kolmio, jonka kanta on yksi monikulmion sivu ja huippu on keskipisteessä.
3. Määritä huippukulman suuruus **Kulma**-työkalulla. Valitse kulman kyljeltä piste, jonka jälkeen valitse vielä kulman toiselta kyljeltä piste. Nyt ohjelma ilmoittaa kulman suuruuden asteina.
4. Määritä kymmenkulmion sivun pituus (eli piirtämäsi kolmion kannan pituus) ja kymmenkulmion piiri.



5. Tarkista. Valitse **Etäisyys tai pituus** -työkalu . Sivun pituuden saat valitsemalla sivun päätepisteet. Piirin saat valitsemalla jonkin kymmenkulmion sivuista.

## **Suunnikas**

Piirrä koordinaatistoon janoja, joiden toinen päätepiste on x-akselilla ja toinen päätepiste y-akselilla ja joiden pituus on 2. Millaisen kuvion janojen keskipisteet näyttävät muodostavan?

### **Nelikulmion pinta-alan määrittäminen**

Nelikulmion päätepisteet ovat  $A=(-2,-2)$ ,  $B=(6,-2)$ ,  $C=(4,4)$ ,  $D=(-4,6)$ . Mikä on nelikulmion pinta-ala? (Älä käytä Geogebrian omaa toimintoa kuin tarkistukseen.)

Vihje: Käytä hyväksi suorakulmion pinta-alaa.

a) Piirrä kuvaruutuun nelikulmio käyttämällä Geogebrian monikulmio-toimintoa (viides valikko). Piirtämisen helpottamiseksi voit lisätä koordinaattiruuduston näkyviin Näytä-valikosta. Mikäli nelikulmion kärkipisteet eivät heti osu kohdalleen, voit siirtää niitä tarttumalla kyseiseen pisteeseen tai muuttamalla pisteen koordinaatteja, jotka näkyvät kuvaruudun vasemmassa laidassa.

b) Piirrä nelikulmion ympärille mahdollisimman pieni suorakulmio merkitsemällä suorakulmion kärkipisteet uusi piste-toiminnolla (toinen valikko) ja piirtämällä suorakulmion sivut kahden pisteen välinen jana-toiminnolla (kolmas valikko). Piirrä suorakulmio siten, että suorakulmion sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Nelikulmion kärkipisteiden on tällöin oltava suorakulmion sivujanoilla.

c) Selvitä nyt suorakulmion ja nelikulmion väliin syntyneiden kolmioiden pinta-alat. Miten voit niiden ja suorakulmion pinta-alan avulla selvittää nelikulmion pinta-alan. Tarkista saamasi tulos ohjelman omalla Pinta-ala-toiminnolla (kahdeksas valikko).

### **Viisikulmion pinta-ala**

Laske sellaisen säännöllisen viisikulmion ala, jonka kaksi kärkeä ovat pisteissä  $(1,2)$  ja  $(-2,1)$ . (Vastaus:  $17,2$ )

### **Kolmion kulmien summa**

Osoita, että kolmion kulmien summa on  $180^\circ$  (**Sopii opettajan havainnollistamisvälineeksi**)



1. Piirrä kolmio ABC **Monikulmio**-työkalulla
2. Piirrä pisteen B kautta kulkeva, kyljen AC kanssa yhdensuuntainen suora. Valitse **Yhdensuuntainen**-työkalu normaalityökalun alavalikosta. Klikkaa ensiksi kylkeä AC, ja sitten pistettä B. Piirrä vastaavasti yhdensuuntaiset suorat BC ja AB pisteen B kautta. Löydät kulmat kolmion ABC oikealta ulkopuolelta. Kulmat BAC ja  $BAC^*$  sekä BCA ja  $BCA^*$  ovat samat, koska yhdensuuntaisten suorien väliset vastinkulmat ovat yhtäsuuret. Kulmat BAC ja  $BAC^*$  ovat samassa asennossa ja kulmat BCA ja  $BCA^*$  vastakkaisessa asennossa.
3. Kulmat muodostavat oikokulman  $180^\circ$ .

### **Trigonometriset funktiot**

1. Piirrä suorakulmainen kolmio, jossa on  $30^\circ$ :n terävä kulma ja jonka hypotenuusan pituus on 10 cm, mittaa kolmion kateetit ja määritä  $\sin 30^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$  ja  $\tan 30^\circ$ .

2. Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 10 cm ja 5 cm, ja määritä kulma  $\alpha$ , jolle pätee  $\tan \alpha = 0,5$ .

## Yksikköympyrä, sini ja kosini

Piirrä yksikköympyrä, jonka keskipiste on origossa ja jonka säde on yksi. Merkitse ympyrän kehälle kaksi pistettä A ja B, joista piirät janaat ympyrän keskipisteeseen (säteet). Siirrä piste B x-akselille. Merkitse säteiden välinen kulma. Kirjoita syöttökenttään sini ja kosinifunktiot, joissa muuttujana on merkitty kulma. Nyt voit siirtää pistettä A ympyrän kehää pitkin, jolloin näet, kuinka kulman sinin ja kosinin arvot muuttuvat. Näin pystyt havainnollistamaan yksikköympyrän avulla sinin ja kosinin arvoja. Esim. milloin kulman sini ja kosini yhtä suuret, mitkä ovat sinin ja kosinin arvot 90 tai 180 asteessa.

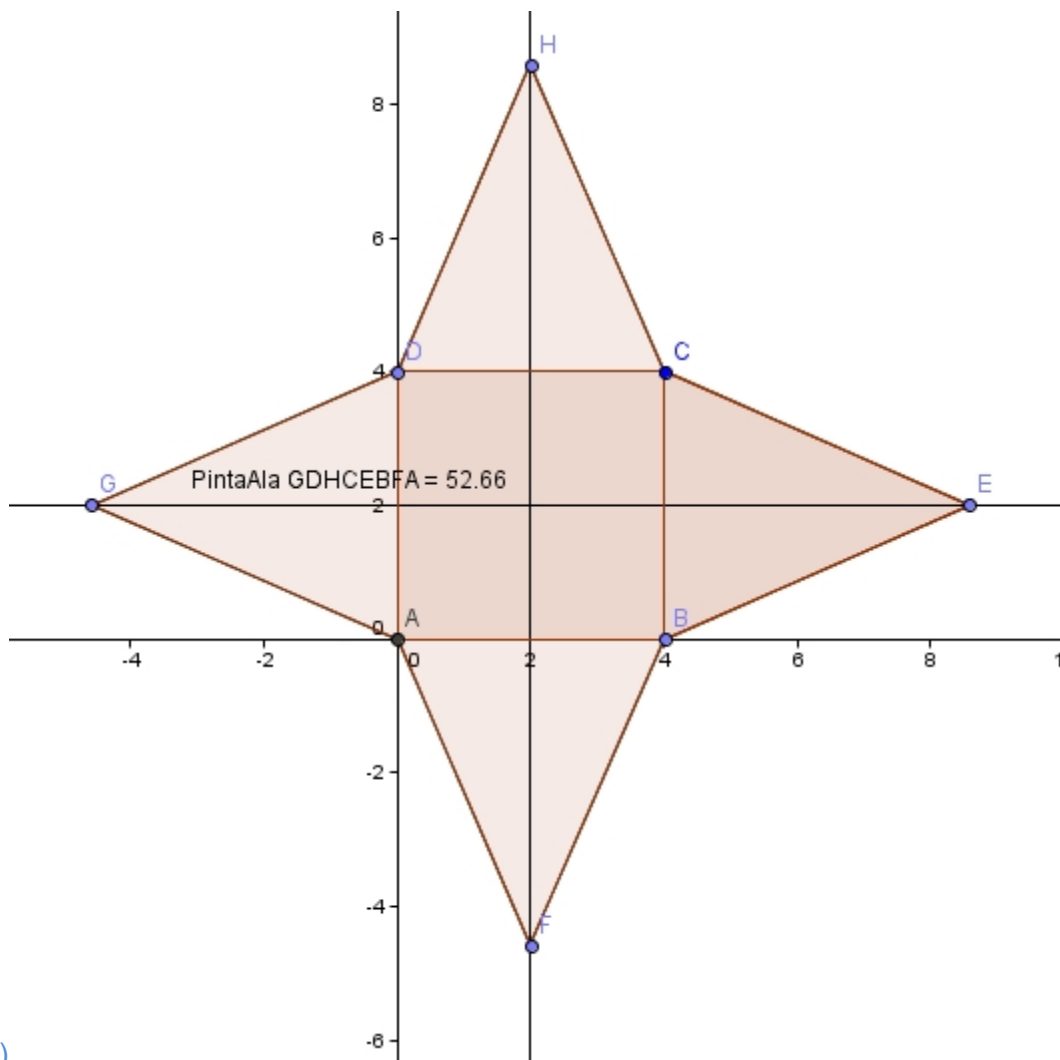
## Kulman määrittäminen trigonometrisesti

Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kulma, jossa pisteitä (1, 3) ja (1, -1) yhdistävä jana näkyy pisteestä (6, -2)

(tehtävä 95, s. 48, Pitkä matematiikka MAA3)

## Pyramidin pinta-ala

Piirrä kuva auki avatusta neliöpohjaisesta pyramidista, jonka pohjan ala on  $16 \text{ cm}^2$  ja sivujan pituus 5 cm. Laske kyseisen pyramidin pinta-ala.



(52,66  $\text{cm}^2$ )



Ratkaisu: Piirrä neliö, jonka kärkipisteet ovat  $A=(0,0)$ ,  $B=(4,0)$ ,  $C=(4,4)$  ja  $D=(0,4)$ . Piirrä kahdelle neliön sivulle keskinormaali ja piirrä janat, joiden pituus on 5, neliön kärkipisteistä keskinormaalille kuvan mukaisesti. Yhdistä kärkipisteet yhtenäiseksi monikulmioksi, ja määritä kuvion pinta-ala.

## Vektorit



Vektori piirretään piirtotyökalun avulla. Klikkaamalla kahta pistettä, joiden kautta vektori kulkee, ohjelma piirtää vektorin. Vektoria voi kääntää ja vektorin pituutta muuttaa hiiren avulla.

### Vektoreiden muodostaminen

1. Piirrä vektori  $b$ . Piirrä eri kohtaan vektori  $c$ , jolle pätee  $c = b$ .
2. Piirrä vektori  $d$ , joka on samansuuntainen vektorin  $c$  kanssa.
3. Piirrä vektori  $e$ , joka on erisuuntainen vektorin  $c$  kanssa.
4. Piirrä vektorit  $f$  ja  $g$ , jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

### Vektoreiden yhteenlasku

1. Valitse **Vektori pisteestä pisteeseen** -työkalu.
2. Klikkaa hiirellä työpöydällä kohtaa, josta haluat vektorin alkavan. Piirrä vektori.

3. Vektorin pituuden saa selville **Etäisyys tai pituus** -työkalun  avulla.

4. Piirrä toinen vektori.

5. Laske vektorisumma kirjoittamalla syötekenttään  $w = (u + v)$ .

6. Mittaa vektorin  $w$  pituus työkalulla  Merkitsemällä ensin vektorin aloitus- ja päätepiste



-työkalun avulla.

7. Valitse erikseen molemmat vektorit ja piste, josta vektorit alkavat.
8. Mitä tapahtuu, jos liikutat pistettä, josta summavektori alkaa

### Vektorin kertominen kokonaisluvulla

1. Piirrä mielivaltainen vektori.
2. Kirjoita syötekenttään mielivaltaisen kokonaisluvun ja vektorin tulo, esim.  $3u$ .

### Summavektori

1. Piirrä 12 cm pituinen vektori, jonka kärki osoittaa luoteeseen. ( $x$ -akseli osoittaa itään)
2. Piirrä edellisen vektorin jatkeeksi 30 cm pituinen vektori, joka osoittaa koilliseen.
3. Olkoon piste  $P$  jälkimmäisen vektorin kärjen piste. Määritä pisteen  $P$  koordinaatit yhden desimaalin tarkkuudella.

### **Summavektori ja nelikulmio**

1. Piirrä vektorit AB, BC, DC ja AD siten, että ne muodostavat mielivaltaisen nelikulmion ABCD.
2. Tutki kokeilemalla päteekö yhtälö  $AB + BC = AD + DC$ . (vektorisumman avulla).

### **Vektorit suorakulmaisessa kolmiossa**

1. Piirrä mielivaltainen suorakulmainen kolmio vektoreiden avulla.
2. Tutki pitääkö seuraavat väittämät paikkaansa:
  - a. Kärkikulman välisien vektorien keskipisteiden kautta piirretty vektori on puolet kantavektorista.
  - b. Kantavektori ja puolittajavektori ovat yhdensuuntaiset.

## Differentiaalilaskenta

### *Tangenttien välinen kulma*

Kuinka suuressa kulmassa käyrät  $y=x^3-x+2$  ja  $y=x^2-4x+1$  leikkaavat toisensa?

(Vastaus: 41,29 astetta)

### *Derivaatan nollakohdat*

Määritä funktion  $f(x)=3x^3-6x$  derivaatan nollakohdat.

(Vastaus: (-0.82,0) ja (0.82,0))

### *Trigonometrisen funktion derivaatta*

Määritä funktion  $f(x)=3\sin(2x)$  ja sen derivaatan leikkauspiste.

(Vastaus: esim. (0.55, 2.68) ja (2.12, -2.68))

## Integraalilaskenta

### *Funktion määrätty integraali*

Piirrä funktio  $f(x)=x^3-5x+7$ . Laske sen määrätty integraali välillä  $[-2,2]$ .

Ratkaisu: Kirjoita funktio komentoikkunaan ja paina enter. Hae oikealla olevasta alasvetovalikosta INTEGRAALI ja kirjoita hakasulkeisiin  $[f,-2,2]$ . Ohjelma laskee funktion määrätyn integraalin arvoksi 28.

### *Kahden kuvaajan välinen pinta-ala*

Laske funktioiden  $y=x^3+2x^2-x+1$  ja  $y=-x+1$  kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala.

(Vastaus: 1,33)